



Волны в однородных и неоднородных средах

Лекция 3

<http://aislepkov.phys.msu.ru>

Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.

- 1.6. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова. Интенсивность волны
- 1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн
- 1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.
 - 1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.
 - 1.8.2.Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.
 - 1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига.
- 1.9. Волны в упорядоченных структурах.
 - 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.
 - 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.6. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова. Интенсивность волны.

$$W = W_{кин} + W_{пот} =$$
$$= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad \text{-плотность энергии в волне}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{- Закон сохранения энергии}$$

$$S = -\rho v^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{- плотность потока энергии}$$

1.6. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова. Интенсивность волны.

$$\vec{S} = w\vec{v}$$

- вектор Умова (1874 г.)

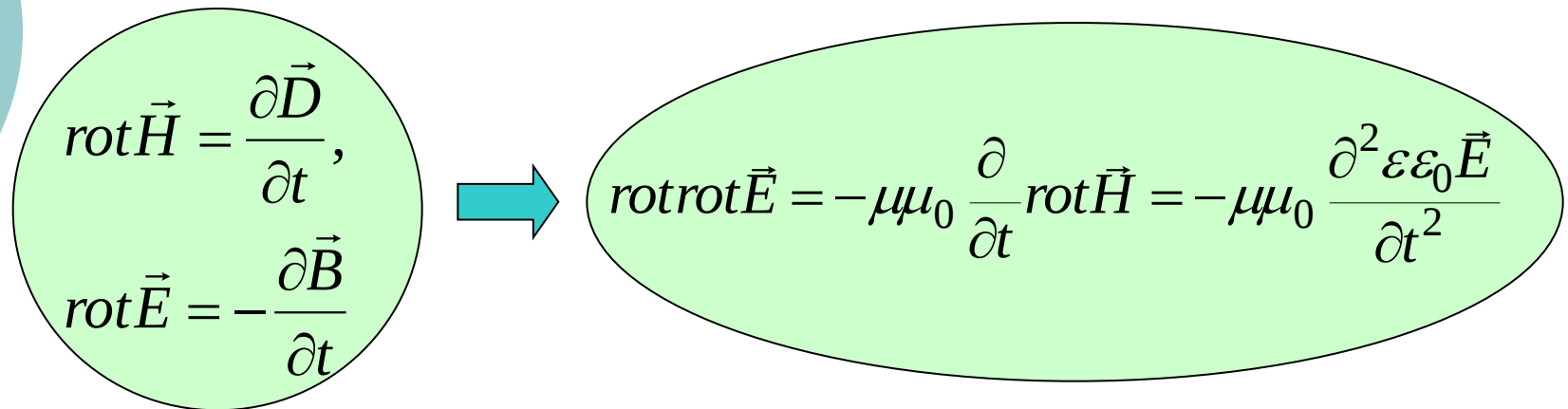
$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} v \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot u_0^2$$

- ИНТЕНСИВНОСТЬ ВОЛНЫ

Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.

- 1.6. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова. Интенсивность волны
- 1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн
- 1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.
 - 1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.
 - 1.8.2.Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.
 - 1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига.
- 1.9. Волны в упорядоченных структурах.
 - 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.
 - 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн.

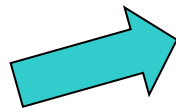

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \text{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{rot rot} \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H} = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

- волновое уравнение

1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$



$$\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



$$\operatorname{div}[\vec{E} \times \vec{H}] = -\left(\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad - \text{закон сохранения электромагнитной энергии}$$

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad - \text{вектор Умова- Пойнтинга}$$

Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.

- 1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн
- 1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.
 - 1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.
 - 1.8.2.Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.
 - 1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига.
- 1.9. Волны в упорядоченных структурах.
 - 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.
 - 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

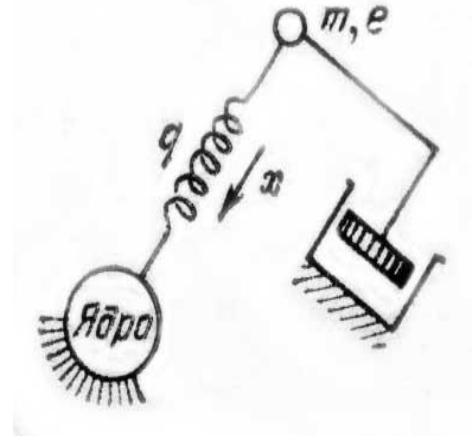
1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.

1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.

$$m\ddot{x} + g\dot{x} + qx = eEe^{i\omega t}$$



$$x = \frac{eE}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}$$



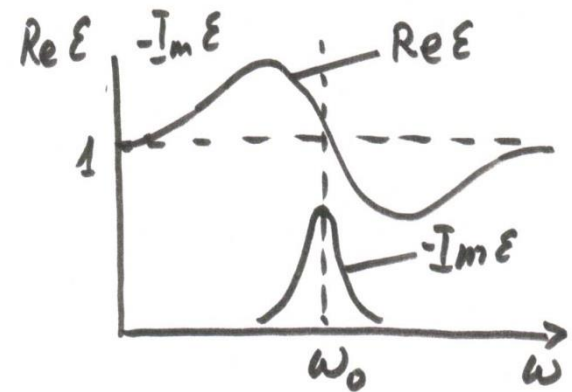
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{p}{\varepsilon_0 E} \\ p = e x \\ \vec{P} = \vec{p} N = \alpha \varepsilon_0 \vec{E} N \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = (\varepsilon_0 + \alpha \varepsilon_0 N) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \end{array} \right.$$



1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 N}{m \varepsilon_0} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = -\frac{e^2 N}{m \varepsilon_0} \cdot \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2}$$



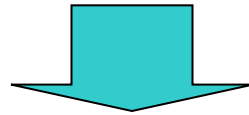
Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.

- 1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн
- 1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.
 - 1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.
 - 1.8.2. Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.
 - 1.8.3. Соотношения Крамерса-Кронига.
- 1.9. Волны в упорядоченных структурах.
 - 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.
 - 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.8.2. Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.

$$\varepsilon = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^2 N(\omega') d\omega'}{m\varepsilon_0 (\omega'^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma(\omega'))}$$

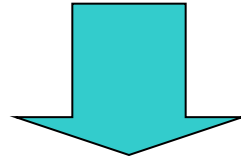
$$N(\omega') = N_0 \frac{\beta}{(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2} \quad - \text{Функция распределения}$$



$$\varepsilon = 1 + \alpha_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma) \cdot ((\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2)}$$

1.8.2. Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.

$$p(\omega') = \left[(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma \right] \cdot \left[(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2 \right]$$

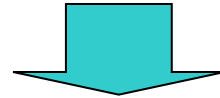


$$\begin{aligned} \left. \frac{dp(\omega')}{d\omega'} \right|_{\omega' = \omega_0 + i\beta} &= \\ \left\{ 2\omega' \cdot \left[(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2 \right] + 2(\omega' - \omega_0) \left[(\omega'^2 - \omega^2) + 2i\omega\gamma \right] \right\} \Big|_{\omega' = \omega_0 + i\beta} &= \\ 2i\beta \left[(\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) + 2i\omega(\beta + \gamma) \right] \end{aligned}$$

1.8.2.Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.

$$B_{\text{вч}}(\omega' = \omega_0 + i\beta) = \frac{\alpha_0}{2i} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - \beta^2) + 2i\omega(\beta + \gamma)}$$

$$B_{\text{вч}}(\omega' = -\sqrt{\omega^2 - 2i\omega\gamma}) = \frac{\beta\alpha_0}{2\sqrt{\omega^2 - 2i\omega\gamma}} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 + \omega^2 + \beta^2) + 2\omega_0\sqrt{\omega^2 - 2i\omega\gamma} - 2i\omega\gamma}$$



$$\varepsilon = 1 + 2\pi i \sum B_{\text{вч}} = 1 + \pi\alpha_0 \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega(\beta + \gamma)}$$

Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.

- 1.7. Волновое уравнение и вектор Умова-Пойнтинга для электромагнитных волн
- 1.8 Колебания в ансамбле невзаимодействующих осцилляторов. Классическая теория дисперсии.
 - 1.8.1. Дисперсия в ансамбле тождественных осцилляторов.
 - 1.8.2.Среда из различных невзаимодействующих осцилляторов с заданной функцией распределения по частотам.
 - 1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига.
- 1.9. Волны в упорядоченных структурах.
 - 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.
 - 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau$$

$$\vec{D}_{\omega} = \varepsilon(\omega) \varepsilon_0 \vec{E}_{\omega} \qquad \varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \vec{E}_{\omega} d\omega$$

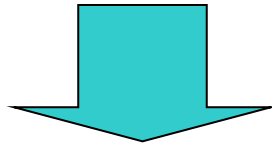
$$\vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \vec{D}_{\omega} d\omega$$

1.8.3.Соотношения Крамерса-Кронига

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$$

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \nu.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \nu.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$



Диспергирующая среда – среда поглощающая

Задание к лекции 3

Задача 1. Получить выражение для интенсивности бегущей

гармонической волны: $I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} v \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot u_0^2$

Задача 2. Амплитуда звуковой волны давлений $\Delta P_0 = 10$ Па. Найти среднее значение потока энергии I , попадающего в ухо человека.

Считать площадь уха, ориентированного перпендикулярно направлению распространения звуковой волны, $S = 4 \text{ см}^2$. Плотность воздуха в отсутствие волны $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$, скорость звука в воздухе $c = 334 \text{ м/с}$.