



# Волны в однородных и неоднородных средах

---

## Лекция 5

<http://aislepkov.phys.msu.ru>

# ***Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.***

---

## **1.9. Волны в упорядоченных структурах.**

**1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.**

1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.10. Предельный переход от упорядоченной структуры к одномерной сплошной среде

1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

1.12. Связанные моды.

1.12.1. Периодическая связь.

1.12.1. Аperiodическая связь.

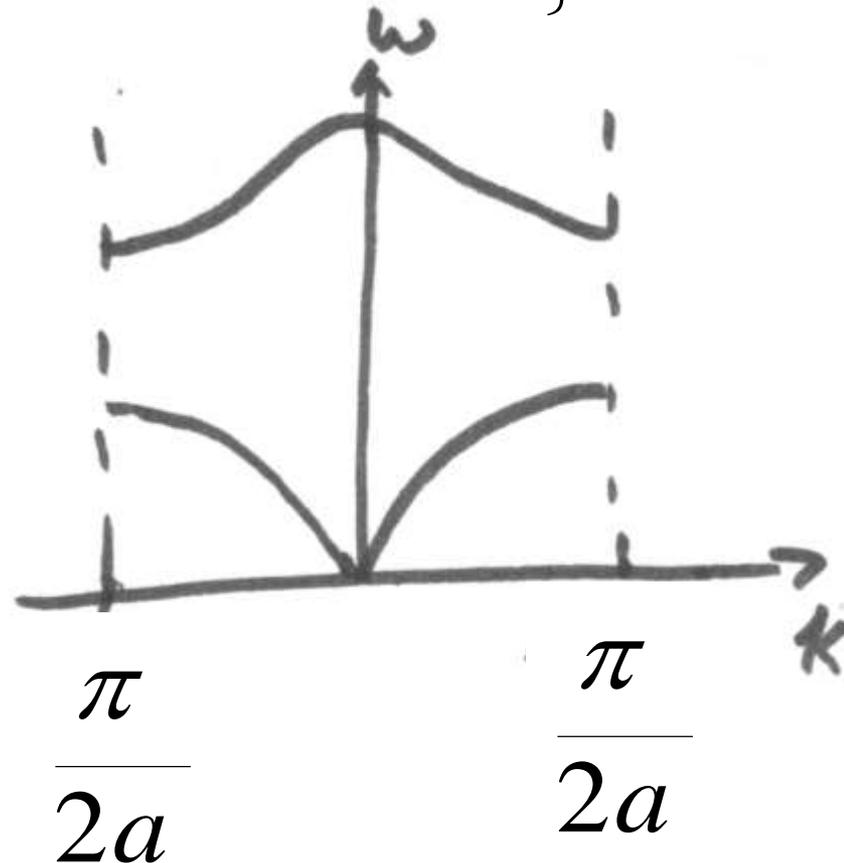
### 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц .

$$\omega_{\pm}^2 = W'' \left\{ \left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]^2 - \frac{4}{m_1 m_2} \sin^2 ka} \right\}$$

При малых  $k$

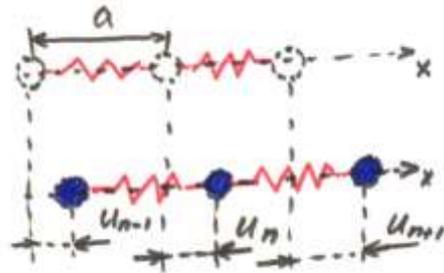
$$\omega_{-} \approx \sqrt{\frac{2W''}{(m_1 + m_2)}} ka,$$

$$\omega_{+} \approx \sqrt{2W'' \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}.$$

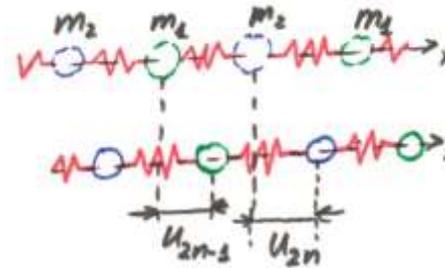


# 1.9. Волны в упорядоченных структурах.

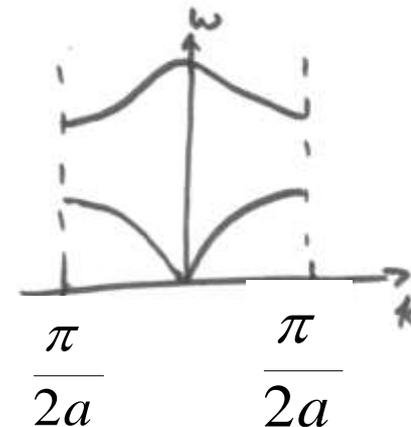
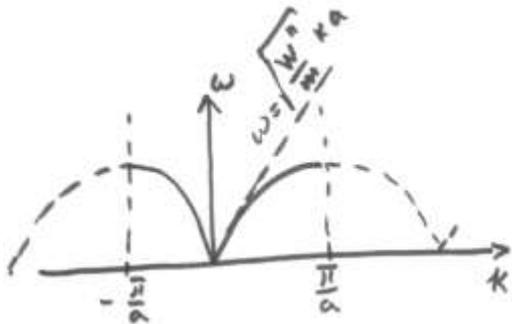
## 1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц .



$$\omega = 2\sqrt{\frac{W''}{m}} \sin \frac{ka}{2}$$



$$\omega_{\pm}^2 = W'' \left\{ \left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right]^2 - \frac{4}{m_1 m_2} \sin^2 ka} \right\}$$



# **Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.**

---

1.9. Волны в упорядоченных структурах.

1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.

**1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов**

1.10. Предельный переход от упорядоченной структуры к одномерной сплошной среде

1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

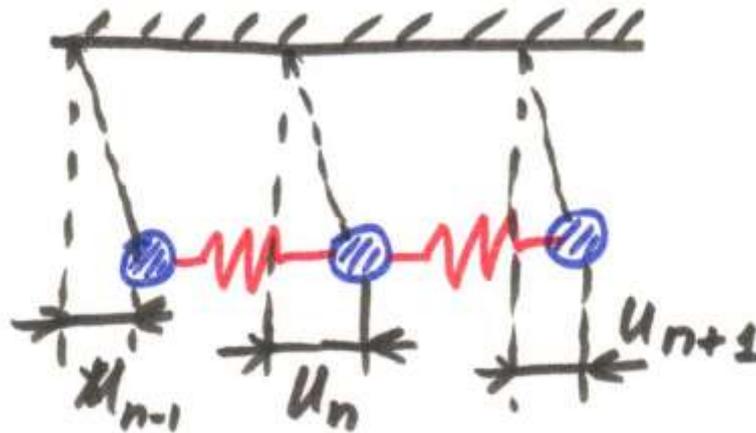
1.12. Связанные моды.

1.12.1. Периодическая связь.

1.12.1. Аперриодическая связь.

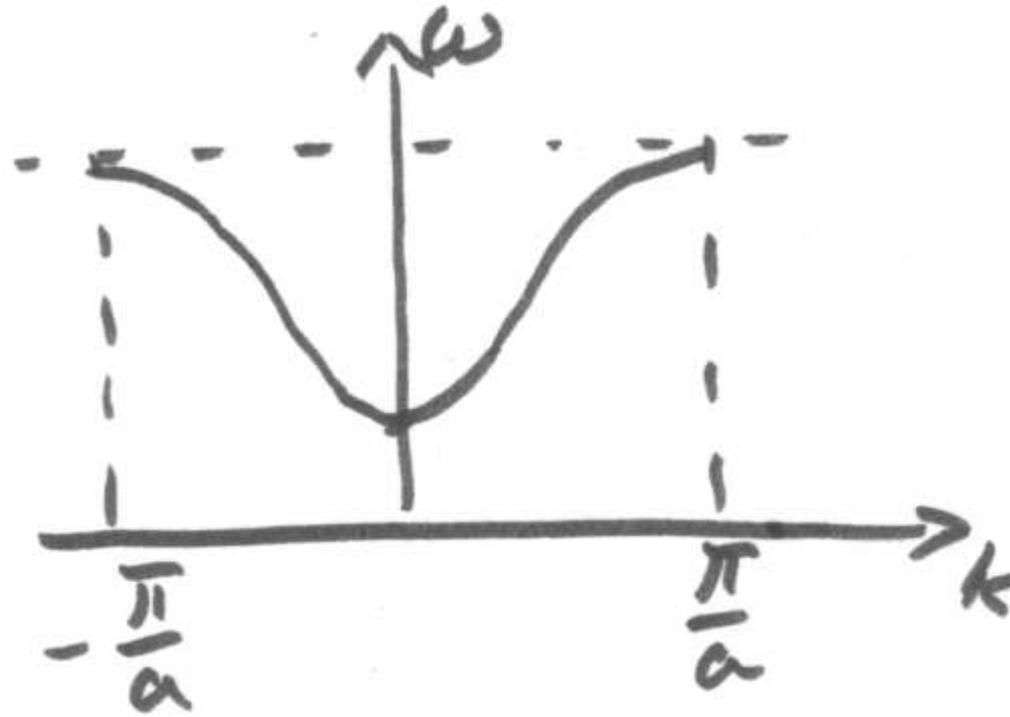
## 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов.

---



$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} + \omega_o^2 u_n = \frac{q}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

## 1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов.



$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4q}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4q}{m} \operatorname{sh}^2 \frac{ka}{2}$$

# ***Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.***

---

1.9. Волны в упорядоченных структурах.

1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.

1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

1.10. Предельный переход от упорядоченной структуры к одномерной сплошной среде

1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

1.12. Связанные моды.

1.12.1. Периодическая связь.

1.12.1. Аперриодическая связь.

## 1.10. Предельный переход от упорядоченной структуры к одномерной сплошной среде.

$$u_{n+1}(t) = u(x + a, t) = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

$$u_{n-1}(t) = u(x - a, t) = u(x, t) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

Уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 u(x, t) = 0$$

# ***Тема 1. Основные свойства волновых процессов малой амплитуды.***

---

## **1.9. Волны в упорядоченных структурах.**

1.9.1. Волны в цепочках связанных частиц.

1.9.2. Волны в цепочках связанных осцилляторов

## **1.10. Предельный переход от упорядоченной структуры к одномерной сплошной среде**

## **1.11. Волновой пакет, групповая скорость.**

## **1.12. Связанные моды.**

1.12.1. Периодическая связь.

1.12.1. Аperiodическая связь.

# 1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

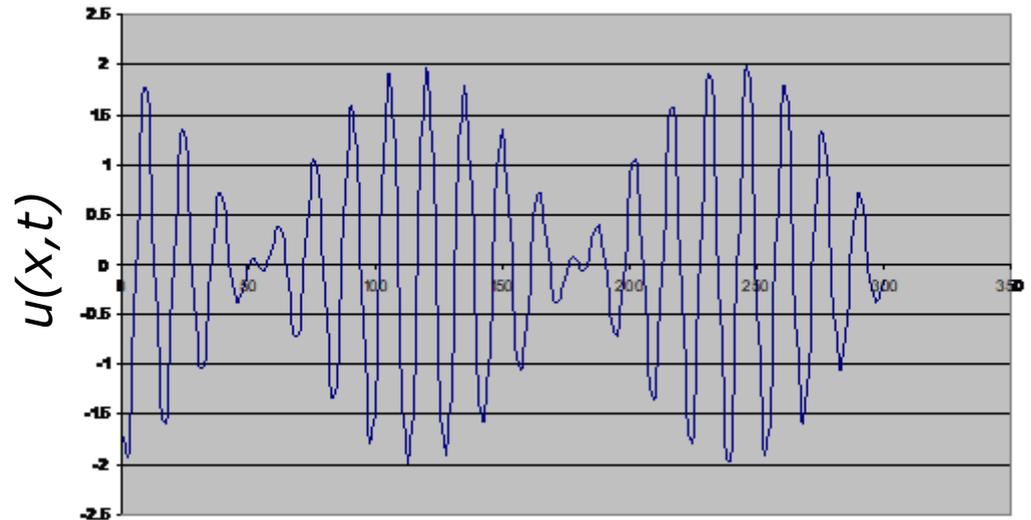
$$u_1(x, t) = a \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$u_2(x, t) = a \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$k_2 - k_1 = \Delta k$$

$$\omega_2 - \omega_1 \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k$$

Волновой пакет



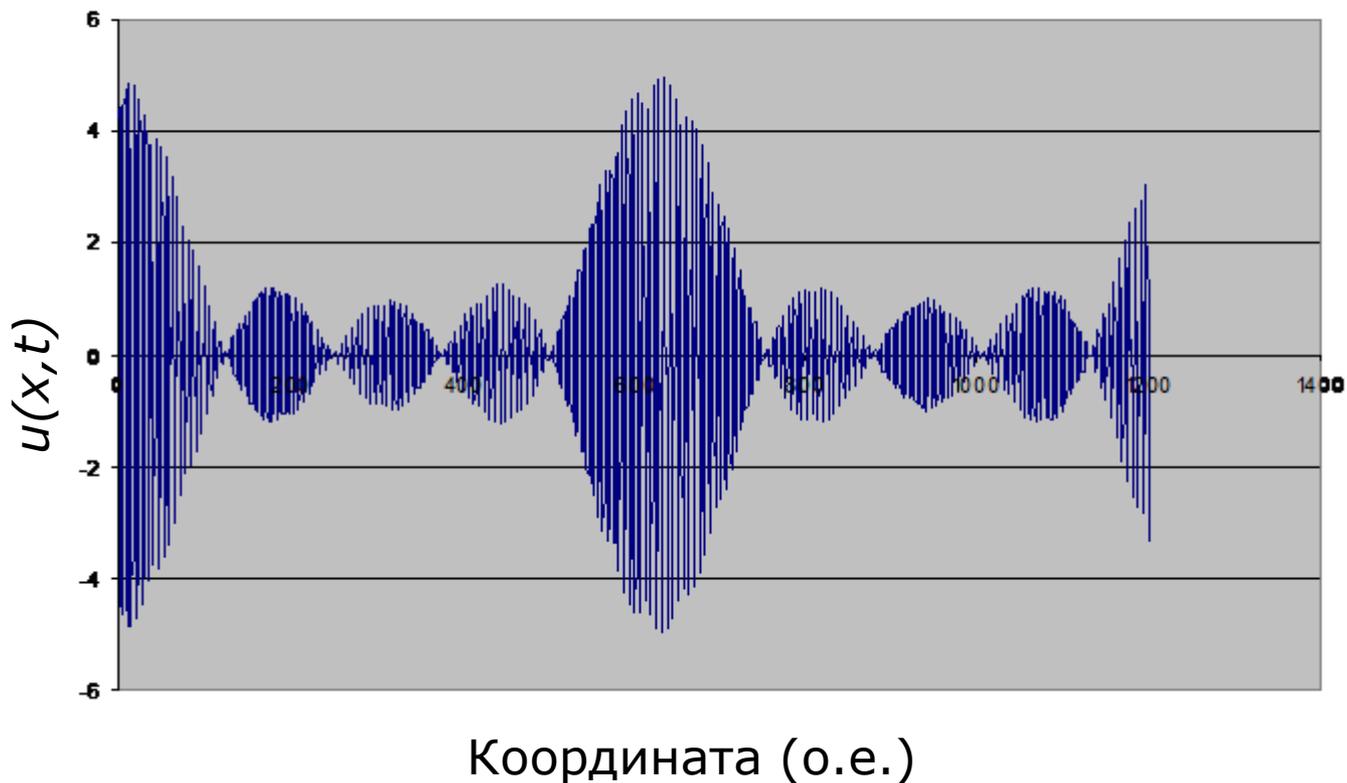
Координата (о.е.)

$$u(x, t) = 2a \cos\left(\left(\frac{d\omega}{dk} t - x\right) \frac{\Delta k}{2}\right) \cdot \sin(\omega t - kx)$$

## 1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

$$u(x,t) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)}$$

Волновой пакет (N=5)



## 1.11. Волновой пакет, групповая скорость.

---

$$u(x, t) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} a(k) e^{i(\omega(k)t - kx)}$$

$$u(x, t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \sum_{k=k_1}^{k=k_2} a(k) e^{i \left( (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dt} t - x \right) \right)} \equiv e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} F(v_{gp} t - x)$$

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0}$$

$$F = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} a(k) e^{i \left( (k - k_0) (v_{gp} t - x) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \left( \left. \frac{dv_{gp}}{dk} \right)_{k=k_0} t \right) \right)}$$

# Задание к лекции

---

1. Вычислите фазовые и групповые скорости для волн в средах со следующими дисперсионными уравнениями:

a)  $\omega = vk + \omega_0$  ,

b)  $\omega^2 = v^2 k^2 + \omega_0^2$  ,

c)  $\omega = \sqrt{gk}$  .