

Глава 3 Неинерциальные системы отсчета.

П.3.1 Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции.

Будем называть неинерциальной такую систему отсчета, которая движется с ускорением относительно инерциальных систем отсчета. Рассмотрим движение м.т. относительно неинерциальной системы отсчета. Пусть эта система отсчета движется с ускорением относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Для удобства будем считать инерциальную систему отсчета покоящейся и обозначать ее буквой K . Неинерциальную систему отсчета обозначим буквой K' .

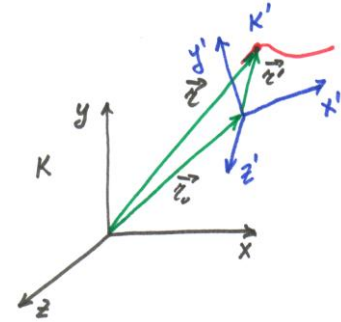


Рис. 3.1.1

В соответствии с п. 1.1.5 можем записать соотношения, связывающие ускорения и скорости в системе K и K'

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \vec{v}' = \vec{v}_{пер} + \vec{v}' \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (\vec{a}_0 + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}'] + \vec{a}' \\ &= \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор} + \vec{a}' \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим, чему равно произведение массы и ускорения м.т. в инерциальной системе координат. Для этого воспользуемся соотношением (2)

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}, \\ m(\vec{a}' + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}) &= \vec{F}, \end{aligned}$$

то есть

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_{пер} - m\vec{a}_{кор}. \quad (3)$$

Выражение (3) является формальной записью второго закона Ньютона для неинерциальной системы отсчета. Второе и третье слагаемое в правой части (3) называются переносной и Кориолисовой силами инерции соответственно

$$\begin{aligned} \vec{F}_{пер} &= -m\vec{a}_{пер} = -m(\vec{a}_0 + [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]), \\ \vec{F}_{кор} &= -m\vec{a}_{кор} = -m \cdot 2 \cdot [\vec{\omega} \times \vec{v}']. \end{aligned}$$

Составляющую переносной силы инерции, связанную со слагаемым $[\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$ называют центробежной силой инерции

$$\vec{F}_{цб} = -m \cdot [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]].$$

Замечание 1. Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а свойствами самих неинерциальных систем отсчета. Поэтому на силы инерции 3-й закон Ньютона не распространяется.

Замечание 2. Силы инерции существуют только в неинерциальных системах отсчета.

Замечание 3. Силы инерции подобно силам тяготения пропорциональны массам. Поэтому в однородном поле сил инерции все тела движутся с одним и тем же ускорением, не зависящим от массы тел как в поле тяготения.

П.3.2. Проявление сил инерции на Земле.

П.3.2.1. Силы, действующие на материальную точку в гравитационном поле Земли.

Представим силу, действующую на материальную точку в виде суммы 3-х сил

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_3 + \vec{F}_0 + \vec{F} + \vec{F}_{ин}$$

Здесь $\vec{F}_3$ - сила, действующая со стороны Земли.

$\vec{F}_0$ - сила, действующая со стороны Луны, Солнца и других планет. В пределах Земли ее можно считать однородной, $\vec{F}$ - другие силы, например, силы, действующие со стороны подвеса или опоры.

Уравнение движения м.т. в неинерциальной системе отсчета связанной с Землей имеет вид (см. рис.)

$$m\vec{a} = \vec{F} + (\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp) - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] + (\vec{F}_0 - m\vec{a}_0)$$

Последнее слагаемое равно нулю, так как в пределах Земли $\vec{F}_0$ - однородна и именно она вызывает движение Земли с постоянным ускорением $\vec{a}_0$.

Пусть материальная точка не движется относительно Земли, тогда сила Кориолиса равна нулю, то есть

$$0 = (\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp) + \vec{F}$$

или

$$\vec{F} = -(\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp),$$

здесь $r_\perp = R_3 \cos\varphi$.

Силу, действующую со стороны м.т. на подвес или опору, называют весом тела P . То есть вес тела равен

$$\vec{P} = -\vec{F} = (\vec{F}_3 + m\omega^2\vec{r}_\perp)$$

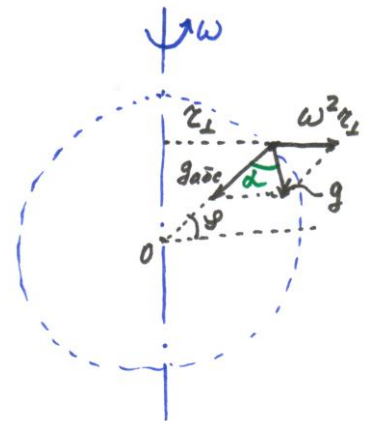
Введем обозначение

$$|\vec{F}_3| = G \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg_{абс}.$$

Тогда измеряемое значение ускорения свободного падения равно

$$\vec{g} = \vec{g}_{абс} + \omega^2\vec{r}_\perp$$

или



$$g^2 = g_{a\bar{b}c}^2 + (\omega^2 r_{\perp})^2 - 2g_{a\bar{b}c} \omega^2 r_{\perp} \cos \varphi$$

откуда в первом приближении получаем

$$g = g_{a\bar{b}c} \left(1 - \frac{1}{2} 2 \frac{\omega^2 r_{\perp}}{g_{a\bar{b}c}} \cos \varphi \right) =$$

$$= g_{a\bar{b}c} - \omega^2 r_{\perp} \cos \varphi = g_{a\bar{b}c} - \omega^2 R_3 \cos^2 \varphi$$

Кроме того из геометрии следует

$$g \sin \alpha = \omega^2 r_{\perp} \sin \varphi,$$

откуда имеем

$$\sin \alpha = \frac{\omega^2 r_{\perp}}{g} \sin \varphi = \frac{\omega^2 R_3}{2g} \sin 2\varphi$$

Измерения показывают, что на полюсе

$$g_{пол} = 9.832 \text{ м/с}^2,$$

на экваторе

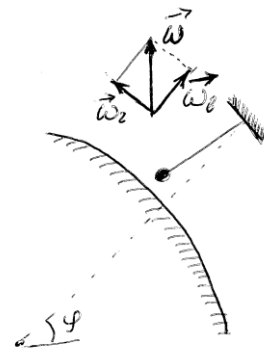
$$g_{экв} = 9.780 \text{ м/с}^2,$$

$$g_{a\bar{b}c} = g_{экв} + \omega^2 R_3 = 9.780 + \frac{4\pi^2}{(86164)^2} 6.378 \cdot 10^8 = 9.814 \text{ м/с}^2$$

Если бы Земля была правильным шаром, то $g_{a\bar{b}c}$ должно быть одной и той же величиной. Таким образом, Земля имеет форму, отличную от шара (форма Земли близка к эллипсоиду вращения и называется геоид).

П.3.2.2. Маятник Фуко.

Французский ученый Фуко в 1851 году продемонстрировал неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, обнаружив экспериментально, что плоскость колебаний математического маятника в поле тяжести Земли вращается. Его маятник имел длину 67 м, масса шара 28 кг. Он был подвешен под куполом парижского пантеона. При одном колебании плоскость поворачивалась на 3 мм по окружности. Полный оборот маятник совершал за 32 часа.



Рассмотрим теорию этого явления.

Уравнение движения маятника равно

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega} \times \vec{v}] + \vec{F} \quad (4)$$

Разложим угловую скорость вращения Земли на вертикальную и горизонтальную составляющие. Горизонтальную составляющую, в свою очередь, разложим на составляющую, лежащую в плоскости колебаний маятника и перпендикулярную ей.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_z = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel. \quad (5)$$

после подстановки (5) в (4) получаем

$$[\vec{\omega}_\parallel \times \vec{v}] = 0.$$

Вектор $[\vec{\omega}_\perp \times \vec{v}]$ направлен по вертикали и приводит к незначительному изменению натяжения нити подвеса, чем можно пренебречь.

То есть (4) можно записать в виде

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 2m[\vec{\omega}_e \times \vec{v}] + \vec{F}.$$

Сила Кориолиса в этом уравнении действует перпендикулярно плоскости качания и приводит к повороту плоскости качания.

Чтобы исключить действие силы Кориолиса перейдем в систему координат, вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e$, в этой системе координат плоскость колебаний маятника не будет менять свое направление, значит угловая скорость поворота плоскости колебаний маятника на широте φ равна

$$\vec{\omega}_e = \vec{\omega} \sin \varphi.$$

Отсюда получаем выражения для времени поворота на полный оборот

$$T_{ep} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi} = \frac{T}{\sin \varphi}.$$

Замечание. Можно получить формулу для периода поворота маятника и в инерциальной системе отсчета. Особенно просто это сделать, когда маятник расположен на полюсе.

П.3.2.3. Отклонение падающих тел к Востоку.

Все тела, свободно падающие на Землю, отклоняются к востоку.

Для простоты будем рассматривать падение тела с высоты h на экваторе. На тело действует сила притяжения и сила Кориолиса, поэтому скорость тела будет иметь две составляющие. Наличие вертикальной составляющей скорости приводит к появлению силы Кориолиса, что в свою очередь приводит к возникновению горизонтальной компоненты скорости и отклонению от вертикали.

$$ma_x = (-2m[\vec{\omega} \times \vec{v}_2'])_x$$

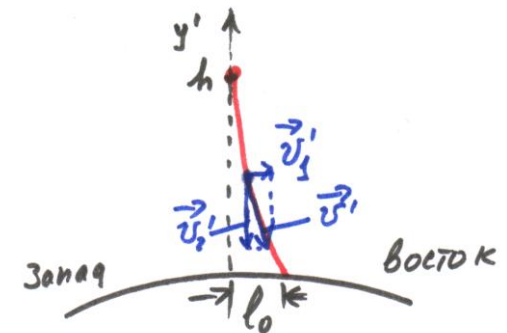
Приближенно можно считать, что вертикальная составляющая скорости меняется по закону

$$v_2' = -gt,$$

следовательно

$$a_x = 2g\alpha t.$$

Для зависимости горизонтальной скорости от времени получаем



$$v_1 = \int_0^t a_x dt = g\omega t^2 \quad .$$

Тогда отклонение к востоку

$$l_0 = \int_0^\tau v_1' dt = \int_0^\tau g\omega t^2 dt = \frac{1}{3} g\omega \tau^3$$

Учитывая, что $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, находим

$$l_0 = \frac{1}{3} g\omega \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} \omega h \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

численная оценка:

для $h=100$ м, $l_0=2.2$ см

П.3.3.Принцип эквивалентности.

Силы гравитационного взаимодействия пропорциональны массе тела, которую называют гравитационной массой тел, силы инерции также пропорциональны массе тела, только его инертной массе. Если инертная и гравитационная массы равны, то невозможно отличить, какая сила действует на данное тело – гравитационная или сила инерции.

Лифт Эйнштейна. Пусть тела находятся в лифте, который удален от гравитирующих тел и движется с ускорением. Тогда на все тела, находящиеся в лифте действуют сила инерции равная $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_0$, тела под действием этих сил будут давить на опору или подвес, то есть будут обладать весом. Если лифт не движется, а висит над какой-то гравитирующей массой в однородном поле, то все тела также будут обладать весом. Находясь в лифте невозможно отличить эти две силы. Поэтому все механические явления будут в обоих лифтах проходить одинаково.

Принцип эквивалентности состоит в следующем. "Все физические явления в равномерно ускоренном лифте будут происходить в точности так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести". Принцип эквивалентности лежит в основе общей теории относительности или релятивистской теории гравитации.