Глава 2. Законы сохранения в простейших системах

П.2.1 Закон сохранения импульса

П.2.1.1.Замкнутые и изолированные системы тел. Закон сохранения импульса.

Замкнутой называется такая система тел, для которой сумма всех внешних сил равна нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую вообще не действуют внешние силы

Рассмотрим систему взаимодействующих материальных точек, на которую действуют также внешние силы. Для каждой материальной точки запишем уравнение движения.

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \sum\limits_{j=2}^{N} \vec{f}_{1j} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \sum\limits_{j=1,\, j\neq 2}^{N} \vec{f}_{2j} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_N\vec{a}_N = \vec{F}_N + \sum\limits_{j=1,\, j\neq N}^{N} \vec{f}_{1j} \end{cases}$$

Здесь $\vec{f}_{ij}$ - сила взаимодействия i-ой и j-ой частиц, $\vec{F}_i$ - внешняя сила, действующая на i-ю частицу.

Так как $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, то

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \qquad (2.1)$$

Если система не замкнута, то

$$d\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i dt\right) -$$

изменение импульса системы тел равно импульсу сил, действующих на эту систему (**Закон изменения импульса**).

Если рассматриваемая система тел замкнута, то

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = 0$$

Закон сохранения импульса: суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным.

Замечание 1. Система может быть замкнута вдоль некоторого направления. В этом случае импульс сохраняется вдоль этого направления.

Замечание 2. Импульс можно считать сохраняющимся и для быстро протекающих процессов, например, при соударении тел, входящих в систему, если, при этом, импульс внешних сил за характерное время стремится к нулю.

П.2.1.2. Теорема о движении центра масс.

Уравнение (2.1) можно записать в виде

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i ,$$

где $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ - масса всей системы.

Будем называть радиус-вектором центра масс системы вектор

$$\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} ,$$

тогда уравнение (2.2) примет вид

$$M \ddot{\vec{r}}_m = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i .$$

Теорема о движении центра масс: центр масс системы тел движется так, как двигалась бы материальная точка с массой равной суммарной массе всех тел системы под действием равнодействующей внешних сил, действующих на эту систему.

П.2.1.3. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

Рассмотрим движение тела с переменной массой на примере ракеты. Будем рассматривать движение относительно лабораторной системы отсчета. Пусть m и $\vec{\upsilon}$ масса и скорость ракеты в произвольный момент времени, dm - масса газов вылетевших из ракеты за время dt, $\vec{\upsilon}_1$ - их скорость. Тогда закон изменения импульса запишется в виде

$$(m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dm\vec{\upsilon}_1 - m\vec{\upsilon} = \vec{F}dt .$$

откуда

$$md\vec{\upsilon} + dm(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}) = \vec{F}dt .$$

Или

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \frac{dm}{dt}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}) = \vec{F} - \frac{dm}{dt}\vec{u} .$$

Здесь $\vec{u} = \vec{\upsilon}_{отн}$- скорость отделяющихся частей относительно ракеты.

Обозначим $\mu = \frac{dm}{dt}$ - расход топлива.

Получаем

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} - \mu \cdot \vec{u}.$$

Это уравнение называют **уравнением Мещерского.**

Величину $-\mu \cdot \vec{u}$ называют **реактивной силой.**

Применим это уравнение для описания движения ракеты, полагая $\vec{F} = 0$.

Получаем

$$m d\vec{\upsilon} = -\mu dt \cdot \vec{u},$$

то есть

$$\int_0^{\upsilon_к} \frac{d\upsilon_x}{u} = -\int_{m_0}^{m_к} \frac{dm}{m}.$$

Здесь m_0-начальная масса ракеты, $m_к$-масса ракеты после сгорания топлива.

Отсюда найдем

$$\frac{\upsilon_к}{u} = -(\ln m_к - \ln m_0) = \ln\frac{m_0}{m_к}.$$

Окончательно имеем **формулу Циолковского**

$$\frac{m_o}{m_к} = e^{\frac{\upsilon_к}{u}}.$$

П.2.2. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии.

П.2.2.1. Работа силы. Мощность. Энергия.

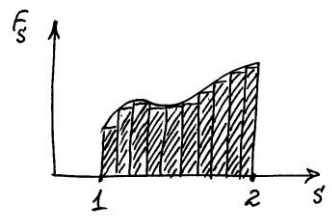
Работа силы

Определение: Элементарной работой силы $\vec{F}$ называется скалярное произведение силы на перемещение точки приложения этой силы.

$$\Delta A = \left(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}\right).$$

Полная работа равна

$$A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i)$$



В качестве значения работы силы по криволинейному участку траектории подразумевают следующий предел

$$A_{12} = \lim_{\substack{N\to\infty,\\ (\Delta\vec{r}\to o)}} \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Мощность

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(\vec{F} \cdot \Delta\vec{r})}{\Delta t} = (\vec{F} \cdot \vec{\upsilon})$$

Энергия – величина, измеряемая той работой, которую эта система тел может совершить.

П.2.2.2.Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек.

Кинетической энергией системы тел ***(энергией движения)*** называется величина, измеряемая той работой, которую может совершить система, двигаясь до полной остановки всех своих частей.

Кинетическая энергия материальной точки равна

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Действительно:

$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{s}\right) = m\int_1^2 \left(\vec{\upsilon} d\vec{\upsilon}\right) = \left.\frac{m\upsilon^2}{2}\right|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}.$$

Таким образом,

$$A_{12} = K_2 - K_1.$$

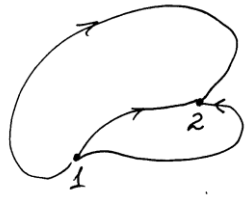
Для системы материальных точек

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{N} A_{12}^{i} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\upsilon_i^2}{2}\right)_2 - \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\upsilon_i^2}{2}\right)_1,$$

где индексы $_1$ и $_2$ указывают на значение величин в соответствующие моменты времени t_1 и t_2.

П.2.2.3. Консервативные силы. Поле сил. Потенциальная энергия материальной точки.

Консервативными называются силы, работа которых по перемещению м.т. из одной точки пространства в другую не зависит от формы траектории, по которой двигалась частица и определяется только координатами начальной и конечной точек.



Поле сил – область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда м.т. действует сила.

Работу консервативных сил можно выразить через разность некоторой скалярной функции U, зависящей от координат.

$$A_{12} = U_1 - U_2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2)$$

Примерами консервативных сил являются силы упругости, силы тяготения, примером некосервативной силы является сила трения.

Будем называть $U(\vec{r})$ - ***потенциальной энергией м.т. в поле сил***.

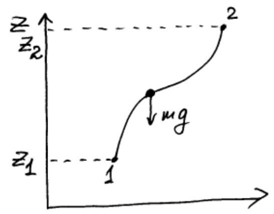
Изменение потенциальной энергии м.т. равно взятой с обратным знаком работе консервативных (потенциальных) сил при перемещении из одной точки в другую.

$$\Delta U = -A_{12}$$

Нормировка потенциальной энергии – задание величины $U(\vec{r})$ в какой-либо точке.

П.2.2.4. Потенциальная энергия м.т. в поле силы тяжести.

$$A_{12} = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = -\int_{z1}^{z2} mgdz = mgz_1 - mgz_2$$

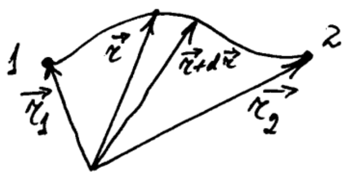


Потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести равна

$U = mgz + const$

П.2.2.5. Потенциальная энергия м.т. в поле упругих сил.

Пусть материальная точка перемещается из положения 1 в положение 2 под действием упругой силы.



Пусть

$\vec{F}_{упр.} = -\kappa\vec{r}$

Тогда работу упругой силы при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 можно определить из соотношения

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_{упр.} d\vec{r}) = -\kappa \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{r} d\vec{r} = -\kappa \frac{1}{2} r^2 \Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{\kappa r_1^2}{2} - \frac{\kappa r_2^2}{2}.$$

Здесь учтено, что

$(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = r(d\vec{r})_r = rdr$,

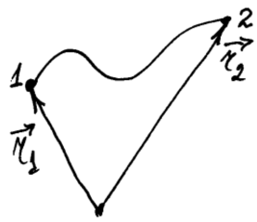
где dr - приращение модуля вектора $|\vec{r}|$.

Из последнего соотношения видно, что силы упругости потенциальные силы, так как их работа не зависит от формы пути.

Величину

$$U_{упр} = \frac{\kappa r^2}{2} + const$$

назовем потенциальной энергией упругой силы.



П.2.2.6. Потенциальная энергия м.т. в гравитационном (кулоновском) поле.

Пусть сила взаимодействия между двумя точечными телами (зарядами), одно из которых неподвижно и расположено в начале системы координат, зависит от расстояния следующим образом

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

где

$\alpha = -Gm_1 m_2$ -для гравитационного притяжения,

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2$$

для кулоновской силы.

Тогда

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 \alpha \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = = \alpha \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2},$$

то есть потенциальная энергия силы равна

$$U = \frac{\alpha}{r} + const.$$

Пусть $U=0$ при $r \to \infty$, тогда $U = \dfrac{\alpha}{r}$, то есть

$U = -G\dfrac{m_1 m_2}{r}$ - для гравитационного взаимодействия,

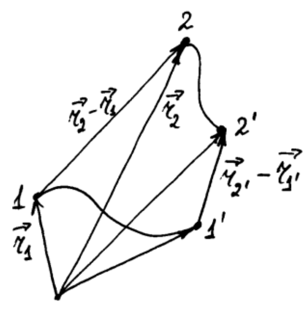
$U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r}$ - для кулоновского взаимодействия.

П.2.2.7. Потенциальная энергия системы материальных точек.

Потенциальной энергией системы тел ***(энергией взаимодействия)*** называется величина, измеряемая той работой, которую может совершить система, изменяя свою конфигурацию.

Нормировка - выбор такой конфигурации системы тел, для которой значение потенциальной энергии принимается равной нулю.

В полную потенциальную энергию системы тел можно включить и потенциальную энергию системы тел в поле внешних консервативных сил.



Энергия взаимодействия двух частиц

Для определенности рассмотрим случай гравитационного взаимодействия. Сила, действующая на вторую частицу со стороны первой равна

$$\vec{F}_{12} = \alpha \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

где $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Элементарная работа сил тяготения при изменении положения частиц равна

$$dA = dA_1 + dA_2 = \vec{F}_{21} d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \alpha \frac{\vec{r}_{12} d\vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \alpha \frac{r_{12} dr_{12}}{r_{12}^3}.$$

Тогда полная работа:

$$A=\int\limits_{R_{12}}^{R'_{12}}\alpha\frac{dr_{12}}{r_{12}^2}=-\alpha\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_{12}}^{R'_{12}}=-\frac{\alpha}{R'_{12}}+\frac{\alpha}{R_{12}}.$$

Величина

$U=U\left(\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|\right)=\dfrac{\alpha}{r_{12}}+const$ - потенциальная энергия взаимодействия двух частиц или просто энергией взаимодействия. Ее изменение определяется только изменением расстояния между частицами.

Энергия взаимодействия систем из N частиц.

Поскольку энергия взаимодействия i и j частиц определяется только расстоянием между частицами: $U_{ij}=U\left(\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|\right)$, то для энергии взаимодействия N частиц можно записать следующее выражение

$$U=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=2\\ i<j}}^{N}U_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}U_{ij}\ .$$

П.2.2.8.Закон сохранения механической энергии.

Полной механической энергией системы материальных точек называется сумма ее кинетической и потенциальной энергии.

Пусть на систему тел действуют внутренние консервативные и неконсервативные силы, а также внешние силы (консервативные и сторонние, которые не являются потенциальными или для них не вводится понятие потенциальной энергии). Тогда

$$A^{сис}=A^{кон}+A^{некон}+A^{конс}_{внеш}+A^{стор}=K_2-K_1$$

Так как (см. п.2.2.5)

$$A_{\Sigma}^{кон}=-\left(U_2-U_1\right),$$

то

$$\left(U+K\right)_2^{сис}-\left(U+K\right)_1^{сис}=A^{некон}+A^{стор}$$

То есть

$$E_2-E_1=A^{некон}+A^{стор}$$

где $E=K+U$- механическая энергия системы материальных точек.

Закон сохранения механической энергии: полная механическая энергия системы тел сохраняется неизменной, если суммарная работа сторонних сил и внутренних неконсервативных сил равна нулю;

П.2.2.9.Связь потенциальной энергии с силой.

Элементарная работа консервативной (потенциальной) силы равна

$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dU.$

При движении материальной точки вдоль определенной траектории можно записать

$$F_s ds = -\frac{\partial U}{\partial s} ds,$$

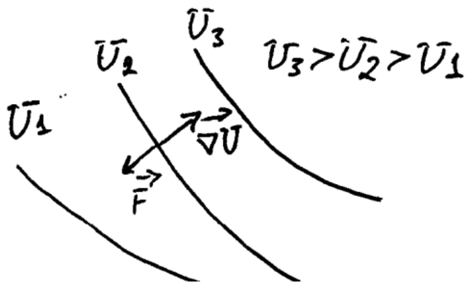
где F_s - проекция силы на касательную к траектории. То есть

$$F_s = -\frac{dU}{ds}.$$

Здесь F_s производная по направлению перемещения частицы.

Можно рассмотреть то же самое соотношение в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}, \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$



То есть

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial x}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial x}\vec{k} =$$

$$-\, gradU = -\vec{\nabla}U$$

Здесь введен в рассмотрение оператор

$$grad = \vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x}$$

П.2.3. Связь законов сохранения с однородностью пространства и времени.

Закон сохранения импульса.

При выводе закона сохранения импульса мы использовали кроме второго также третий закон Ньютона. Покажем, что утверждение о том, что между материальными точками действуют силы равные по величине и противоположные по направлению следует из однородности пространства.

Под однородностью пространства понимают эквивалентность всех его точек. Это означает, например, что эволюция изолированной системы не зависит от того, в какую точку пространства ее поместить. Для потенциальной энергии изолированной системы можно записать.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N) = U(\vec{r}_1 + \vec{b}, \vec{r}_2 + \vec{b}, \dots \vec{r}_N + \vec{b}).$$

Воспользуемся этим свойством для изолированной системы двух частиц, положим вектор $\vec{b}$ бесконечно малой величиной. Пусть рассматриваемые материальные точки расположены вдоль оси *x*. Тогда при их одновременном смещении вдоль этой оси

$$U(x_1, x_2) = U(x_1 + dx, x_2 + dx) .$$

Так как dx – бесконечно малая величина, то для $U(x_1 + dx, x_2 + dx)$ можно записать

$$U(x_1 + dx, x_2 + dx) = U(x_1, x_2) + \frac{\partial U}{\partial x_1}dx + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx,$$

Следовательно

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\right)dx = 0$$

То есть

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_2}$$

или

$$F_1 = -F_2,$$

что соответствует утверждению о том, что между материальными точками действуют силы равные по величине и противоположные по направлению.

Закон сохранения механической энергии.

Рассмотрим отдельную материальную точку, помещенную в потенциальное поле. В этом случае для работы потенциальной силы

$$A_{12} = K_2 - K_1 .$$

Причем силу можно определить через некоторую потенциальную функцию так, что можно записать

$$A_{12} = \int_1^2 \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) =$$

$$-\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) =$$

$$-\int_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz + \frac{\partial U}{\partial t}dt\right) + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt =$$

$$U_1 - U_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt$$

Здесь учтено, что потенциал в общем случае может зависеть как от координат, так и от времени.

Таким образом, должно выполняться соотношение.

$$\left(K_2 + U_2\right) - \left(K_1 + U_1\right) = \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}dt .$$

Для рассматриваемой системы не важно, в какой момент времени начинается ее эволюция (свойство однородности времени), поэтому потенциальная энергия не может явным образом зависеть от времени, то есть

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} dt = 0.$$

Следовательно, закон сохранения механической энергии непосредственно связан с однородностью времени.