Глава 4. Основы релятивистской механики.

П.4.1.Пространство и время в теории относительности.

4.1.1 Развитие взглядов на скорость света

Галилей считал скорость света конечной, но не смог предложить пригодных методов для ее измерения.

Декарт (1596-1650)-свет это давление, передаваемое через среду с бесконечной скоростью. Мысль о необходимости среды.

Гримальди (1618-1660), Гук (1625-1695), Гюйгенс (1629-1695) – волновая точка зрения на свет

Ньютон (1643-1727)- свет – поток корпускул.

Определение скорости света Рёмером и Брэдли

Опыт Рёмера (1676г.) основан на исследовании затмений спутников Юпитера. Он получил значение скорости света c=214300 км/с.

Брэдли в 1727 г. подтвердил результаты Ремера, рассматривая аберрацию света.

Итак

- скорость света конечна.
- если свет волны в эфире, то существует абсолютная скорость, а скорость света относительно различных движущихся тел должна зависеть от их скорости.
- Если свет корпускулы, то их скорость относительно источника – постоянна.

Инвариантность скорости света

Если представления классической механики Ньютона справедливы, то скорость света в различных движущихся системах отсчета должна быть разной.

Однако экспериментальные исследования не подтверждают это соотношение и свидетельствуют о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета, то есть ***c=inv.***

Опыт Майкельсона и Морли

Идея опыта – сравнение прохождения светом двух путей, из которых один совпадает с направлением движения тела в эфире, а другой ему перпендикулярен.

Первый надежный эксперимент, подтверждающий этот факт, выполнили Майкельсон и Морли в 1887 г. (опубликовали).

Время прохождения света в 1-м плече:

$$t_1 = \frac{D}{c-V} + \frac{D}{c+V} = D\frac{2c}{c^2 - V^2}$$

Время, за которое свет пройдет второе плечо:

$$t_2 = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}}.$$

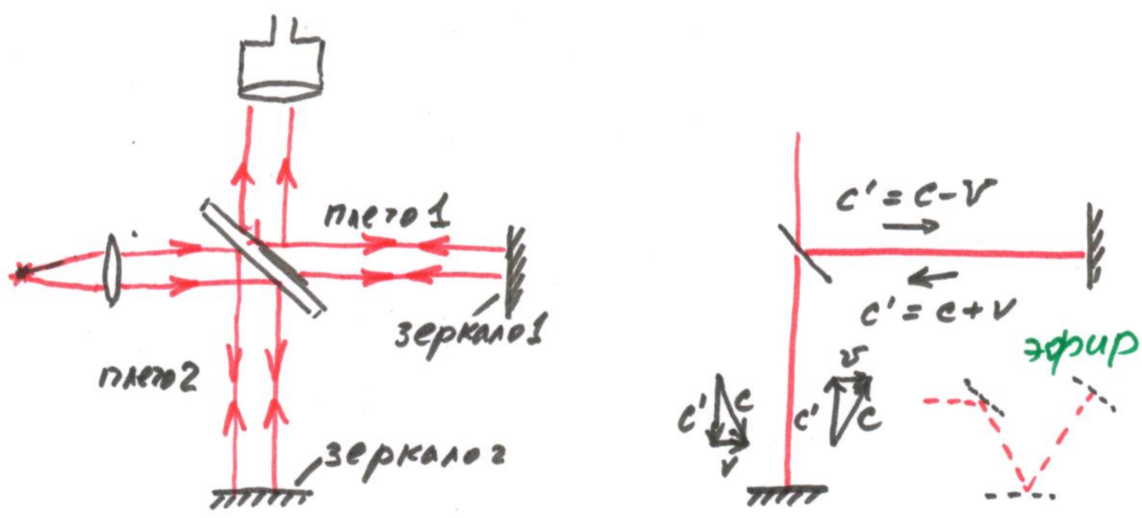
Расстояние, которое прошел свет за это время

$$d_1 = t_1 c = 2D\frac{c^2}{c^2 - V^2} \approx 2D\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right),$$

$$d_2 = t_2 c = 2D\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \approx 2D\left(1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c}\right).$$

$d_1 - d_2 = D\dfrac{V^2}{c^2}$. – разность хода двух лучей.

Это должно приводить к смещению интерференционных полос.



В опыте интерферометр вращался – это должно было приводить к периодическому смещению полос интерференции. Никакого смещения полос обнаружено не было.

Впоследствии ряд прямых и косвенных экспериментов подтвердило постулат о постоянстве скорости света. Измеренное современными методами значение скорости света равно с=299792458 м/с.

4.1.2. Основные положения специальной теории относительности

А.Эйнштейн, проанализировав неудачу опытов обнаружить относительное движение относительно мирового эфира, создал новое представление о пространстве и времени - специальную теорию относительности.

В основе СТО лежат два постулата

1. Все инерциальные системы равноправны (принцип относительности)
2. Скорость света в пустоте не зависит от движения источника.

Первый постулат означает, что физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета: все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны (ковариантны), то есть не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Второй постулат утверждает, что скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях. Т.е. Скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

П.4.2.Преобразования Лоренца.

Найдем преобразования координат и времени исходя из условия, что волновой фронт от точечного источника света во всех инерциальных системах имеет сферическую форму, распространяется с одной и той же скоростью с.

Рассмотрим две системы K и K' для которых начала координат при t=0 совпадали, пусть в момент времени t=0 в начале систем координат происходит вспышка света, тогда в обеих системах координат фронт должен представлять собой сферу, причем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \qquad (1)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \qquad (2)$$

Закон преобразования x'=Φ(x,y,z,t) – должен быть линейным, иначе равномерность распространения сферического фронта будет нарушаться.

Итак

$x'=A_1x+A_2y+A_3z+A_4t+A_5$.

Исходя из принципа относительности следует, что y=y', z=z'.

Действительно, пусть вдоль оси y расположены два одинаковых стержня. Тогда, если при сближении один стержень будет шире другого, то одна из систем координат будет выделена. Это противоречит принципу относительности.

Поэтому

$x'=A_1x+A_4t$,

$t'=at+bx$.

При $x'=0$, $x=Vt$,

$$Vt + \frac{A_4}{A_1} t = 0, \Rightarrow \frac{A_4}{A_1} = -V .$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ t' &= at + bx \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \qquad (4)$$

Подставляя полученные выражения в (2) получаем

$$y^2 + z^2 + \gamma^2 (x - Vt)^2 - c^2 (at + bx)^2 = 0$$

$$y^2+z^2+\gamma^2\left(x^2-2xVt+(Vt)^2\right)-c^2\left(a^2t^2++2abtx+b^2x^2\right)=0$$

$$\begin{gathered}\left(\gamma^2-c^2b^2\right)x^2+y^2+z^2-c^2\left(a^2-\gamma^2\frac{V^2}{c^2}\right)t^2-\\-\left(2\gamma^2V+c^2 2ab\right)tx=0\end{gathered} \tag{5}$$

отсюда и из (1) следует

$$\begin{cases}\gamma^2-c^2b^2=1,\\ a^2-\gamma^2\dfrac{V^2}{c^2}=1,\\ c^2 2ab+2\gamma^2V=0.\end{cases} \tag{6}$$

Решая полученную систему уравнений получаем

$$\begin{gathered}b=-\frac{\gamma^2}{a}\frac{V}{c^2},a^2=\gamma^2,\\ \gamma^2=\frac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}.\end{gathered} \tag{7}$$

Окончательно преобразования координат (преобразования Лоренца) запишутся в виде

$$\begin{aligned}&x'=\gamma(x-Vt),\\ &y'=y,\\ &z'=z,\\ &t'=\gamma\left(t-\frac{V}{c^2}x\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\gamma^2=\dfrac{1}{1-\dfrac{V^2}{c^2}}$.

Легко показать, что обратные преобразования Лоренца имеют вид

$$x = \gamma\left(x'+Vt'\right),$$
$$y = y',$$
$$z = z', \qquad (9)$$
$$t = \gamma\left(t'+\frac{V}{c^2}x'\right).$$

П.4.3. Следствия преобразований Лоренца.

П.4.3.1 Относительность одновременности.

Пусть в системе К происходит два события: $A_1(x_1,,t_1)$ и $A_2(x_2, ,t_2)$, тогда

$$t_2'-t_1' = \gamma\left(t_2 - t_1 - \left(x_2 - x_1\right)\frac{V}{c^2}\right). \qquad (10)$$

Если, например, в К события происходят одновременно (t_2-t_1=0), то в К' события не одновременны. Кроме того порядок следования событий также может измениться: Так если t_2-t_1=ε>0, то при $\left(x_2 - x_1\right)\frac{V}{c^2} > \varepsilon$ порядок следования событий изменится (t_2\`-$t_1$\`<0).

П.4.3.2. Замедление темпа хода движущихся часов.

Пусть часы покоятся в системе К'. Воспользуемся обратным преобразованием Лоренца. Длительность временного интервала будем измерять в одной точке пространства ($x_1' = x_2'$)

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2'+x_2'\frac{V}{c^2}\right) - \left(t_1'+x_1'\frac{V}{c^2}\right) = \gamma\left(t_2'-t_1'\right) \qquad (11)$$

$$\Delta t = \gamma\Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad (12)$$

где $\Delta t_0 = t_2'-t_1'$- собственное время.

Часы в лабораторной системе отсчета покажут больший интервал времени, чем в движущейся (в которой часы покоятся).

П.4.3.3.Изменение длин движущихся отрезков.

Пусть $l_0 = x_2' - x_1'$ длина отрезка, покоящегося в K'-системе

Используя преобразования Лоренца, получаем

$$l_0 = x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - Vt_2) - \gamma(x_2 - Vt_1). \qquad (13)$$

В K - системе длина l определяются как разность x_2-x_1 измеренных в один и тот же момент времени t_2=t_1, поэтому

$$l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l \qquad (14)$$

или $l = \dfrac{l_0}{\gamma} = l_0\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}$ - Лоренцево сокращение.

Стержень имеет максимальную длину в той системе отсчета, в которой он покоится.

П.4.4. Интервал.

Согласно СТО ни пространственные отрезки, ни промежутки времени в общем случае не являются инвариантами преобразований при переходе от одной инерциальной СО к другой.

Инвариантом в СТО является скорость распространения света c.

Другим инвариантом является интервал

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = S_{12}^2 = inv \qquad (15)$$

Это утверждение можно проверить непосредственно с помощью преобразований Лоренца. Этот инвариант называют инвариантом пространственно-временного интервала.

Интервал времениподобный, если $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 > 0$,

пространственноподобный, если $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 < 0$,

светоподобный: $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = 0$.

В случае пространственноподобного интервала ни в одной системе отсчета события не могут оказать влияние друг на друга. События, разделенными светоподобными и времениподобными интервалами могут оказывать влияние друг на друга.

Наличие инвариантного интервала позволяет нам рассматривать события как события, происходящие в 4-х мерном пространстве-времени, где в качестве 4-й координаты используется время.

П.4.5. Сложение скоростей.

Для вывода преобразований скоростей воспользуемся определением скорости.

$$\upsilon_x{}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'};\upsilon_y{}' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'};\upsilon_z{}' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} \qquad (16)$$

$$\upsilon_x{}' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x_2{}' - x_1{}'}{t_2{}' - t_1{}'} = \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\gamma\left(\Delta t - \Delta x\dfrac{V}{c^2}\right)} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x\dfrac{V}{c^2}} \qquad (17)$$

$$\upsilon_y{}' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{y_2{}' - y_1{}'}{t_2{}' - t_1{}'} = \frac{(\Delta y)}{\gamma\left(\Delta t - \Delta x\dfrac{V}{c^2}\right)} = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \upsilon_x\dfrac{V}{c^2}\right)} \qquad (18)$$

Таким образом, преобразования скоростей имеют следующий вид.

Прямое преобразование скоростей:

$$\begin{cases} \upsilon_x{}' = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x\dfrac{V}{c^2}} & (19) \\[2em] \upsilon_y{}' = \dfrac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \upsilon_x\dfrac{V}{c^2}\right)} - & (20) \end{cases}$$

Обратное преобразование скоростей,

$$
\begin{cases}
\upsilon_x = \dfrac{\upsilon_x' + V}{1 + \upsilon_x' \dfrac{V}{c^2}} & (21) \\[2ex]
\upsilon_y = \dfrac{\upsilon_y'}{\gamma\left(1 + \upsilon_x' \dfrac{V}{c^2}\right)} & (22)
\end{cases}
$$

П.4.6. Уравнение движения.

С открытием электрона с массой $m_e \approx \dfrac{1}{2000} m_p$, стало возможным проводить эксперименты по изучению частиц со скоростями близкими к скорости света. Опытным путем было установлено, что уравнение движения заряженной частицы под действием силы Лоренца $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon} \times \vec{B}]$ имеет вид

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right) = \vec{F}\,, \tag{23}
$$

где $\vec{P} = \left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)$ - релятивистский импульс (24)

П.4.7. Импульс, энергия и масса в теории относительности.

Найдем работу силы

$$\int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{S}\right) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}\vec{\upsilon}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{\upsilon}\right) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\vec{\upsilon}\right) dt = \int_{p_1}^{p_2} \vec{\upsilon} d\vec{p} = \left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{p}\right)\Big|_{p_1}^{p_2} - \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \vec{p} d\vec{\upsilon}; \tag{25}$$

$$\int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2} \vec{p} d\vec{\upsilon} = \int_{\vec{\upsilon}_1}^{\vec{\upsilon}_2} \frac{m0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \frac{m0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} d(\upsilon^2) = \\ = (-1)\frac{mc^2}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^{-1/2} d\xi = -\frac{mc^2}{2}\frac{\xi^{1/2}}{+\frac{1}{2}}\Bigg|_{v_1}^{v_2} = -mc^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}\Bigg|_{v_1}^{v_2} \tag{26}$$

Поскольку работа равна разности кинетических энергий

$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{S}\right) = \left[\vec{\upsilon}\vec{p} + mc^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}\right]\Bigg|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \\ \left[\frac{m_0\upsilon^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} + mc^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}\right]\Bigg|_{v_1}^{v_2} = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}}\Bigg|_{v_1}^{v_2} = K_2 - K_1, \tag{27}$$

то введенная таким образом кинетическая энергия определена с точностью до константы.

$$K = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} + K_0 \tag{28}$$

Сделаем переход к нерелятивистским скоростям

$$K = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+....\right)+K_0 \approx$$

$$\approx m_0c^2 + \frac{m\upsilon^2}{2} + K_0 \tag{29}$$

В этой формуле удобно выбрать нормировку

$$K_0 = -m_0c^2. \tag{30}$$

Тогда для релятивистского выражения получаем

$$K = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} + K_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}} - 1\right). \tag{31}$$

Если взять за абсолютное значение энергии частицы величину

$$E = \frac{m_0c^2}{\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{32}$$

то $E_0 = mc^2$ - энергия покоя частицы.

Отметим связь между кинетической энергией частицы и ее импульсом

$$E = \sqrt{p^{\,2} + m_0^2c^4}. \tag{33}$$

О понятии массы в релятивистской механике.

Выражение (33) может служить определением понятия массы в релятивистской теории.

Действительно, определение массы как меры инертности, принятое в классической механике не может быть использовано в релятивистской теории, так как сила и ускорение не коллинеарны. Это утверждение следует из релятивистского уравнения движения. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\vec{\upsilon}\right)=\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)\cdot\vec{a}+\vec{\upsilon}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)=\vec{F}\ .$$

То есть, если направления силы и скорости не совпадают, то не совпадают и направления силы и ускорения.

В релятивистской теории принято массой называть величину

$$m^2=\frac{E^2}{c^4}-\frac{p^2}{c^2}$$

Эта определенная таким образом масса является инвариантной величиной, то есть одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

В частности, если тело покоится, то

$$E_0=mc^2$$

и масса равна энергии покоя с точностью до постоянного множителя.

В этом случае импульс определяется как

$$\vec{p}=\frac{E_0}{c^2}\vec{\upsilon}\ .$$

В релятивистской теории аддитивны энергия и импульс

$$E=E_1+E_2,$$

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2\ .$$

Масса не аддитивна, то есть масса системы тел не равна суммарной массе тел системы. Действительно,

$$m^2=\frac{\left(E_1+E_2\right)^2}{c^4}-\frac{\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)^2}{c^2}\neq\left(m_1+m_2\right)^2.$$

Масса становится аддитивной величиной лишь в нерелятивистском пределе.

Пример 1.

Пусть в системе действуют потенциальные силы, тогда механическая энергия частиц равна

$$W_i=K_i+U_i=E_i-E_{0i}$$

Для того чтобы движение частиц происходило в ограниченной области, необходимо, чтобы $W_i<0$.

В системе центра масс составной частицы суммарный импульс равен нулю, то есть частица обладает лишь энергией покоя, а ее массу найдем из соотношения

$$E_0 = mc^2$$

Для энергии составной частицы выполняется соотношение

$$E_0 = \sum_{i=1}^{N}\left(E_{0i} + W_i\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i c^2 + W_i\right),$$

таким образом, для массы составной частицы

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i - \Delta m,$$

где Δm-дефект массы.

Пример 2.

На Солнце ($M_c=2\cdot10^{30}$ кг) происходит цепочка реакций синтеза. В результате полного цикла:

$$2e^- + 4p \rightarrow {}^4He + 2\nu + Q$$

Полная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени

$$\Phi_C = 3.826\cdot10^{26}\ \text{Вт}$$

дефект массы за одну секунду

$$\Delta m = \frac{\Phi_C}{c^2} = \frac{3.826\cdot10^{26}}{9\cdot10^{16}} \approx 4.3\cdot10^9\ \text{кг}$$