

Глава 5. Кинематика и динамика твердого тела

П.5.1. Кинематика твердого тела.

П.5.1.1. Твердое тело как система материальных точек.

Степени свободы.

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является *абсолютно твердым*. Это означает, что расстояние между двумя любыми точками не изменяется со временем, т.е. твердое тело не деформируется. Далее мы будем вместо термина «абсолютно твердое тело» использовать термин «твердое тело».

Число степеней свободы – число независимых величин, однозначно определяющих положение тела в пространстве.

Для того, чтобы однозначно определить положение твердого тела в пространстве, нужно задать координаты трех его точек, не лежащих на одной прямой. Каждая точка имеет три степени свободы, кроме того каждая пара точек жестко связана уравнением

$$l_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$$

Таких уравнений 3, поэтому полное число степеней свободы твердого тела равно $3+3+3 - 3=6$

При анализе движения твердого тела обычно выделяют специальные случаи движения:

- Поступательное движение;
- Вращательное движение;
- Плоское движение;
- Движение твердого тела с одной неподвижной точкой;
- Движение свободного твердого тела.

П.5.1.2. Поступательное, вращательное и плоское движения твердого тела.

Любое произвольное движение твердого тела можно представить

как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

Поступательным называется такое движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям. В этом случае скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы, и его движение можно характеризовать движением одной лишь точки тела. Анализ такого движения производится по законам, справедливым для движения материальной точки.

Вращательным движением относительно оси называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются окружностями с центрами, лежащими на одной прямой, называемой осью вращения. При вращении твердого тела проекция радиус-вектора каждой его точки на плоскость перпендикулярную оси вращения за малый промежуток времени dt поворачивается на один и тот же угол $d\vec{\varphi}$. Скорость изменения угла

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

называется угловой скоростью и, так же, как $d\vec{\varphi}$ является вектором. Угловая скорость связана с линейной скоростью любой точки тела \vec{V}_i соотношением

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i ,$$

где \vec{r}_i - радиус-вектор любой указанной точки.

Изменение $\vec{\omega}$ со временем определяется величиной углового ускорения

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Плоское движение. Плоским движением твердого тела называется такое движение, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях. Свяжем начало системы координат, движущейся поступательно, с какой-либо точкой A твердого тела (точкой отсчета). Тогда скорость любой другой точки B тела можно представить как векторную сумму скорости движения системы

координат \vec{V}_o (скорость точки A) и \vec{V}' - относительной скорости точки B

$$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{V}' \quad (1)$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем), поэтому и разложение будет неоднозначным. Однако угол поворота $d\vec{\varphi}$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и является одинаковыми для всех точек твердого тела (см.рис.1).

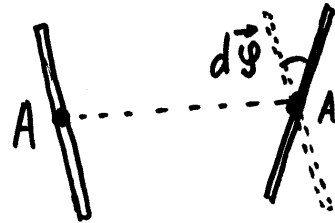


Рис.1

Выражение (1) может быть представлено в следующем виде

$$\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения твердого тела (не зависящая от выбора точки отсчета), \vec{r} - радиус-вектор, начало которого лежит в точке A , а конец в той точке твердого тела, за которой мы наблюдаем. Поступательная скорость тела \vec{v}_o - зависит от выбора точки отсчета. Точка отсчета A жестко связана с твердым телом, но необязательно должна лежать внутри него. В частности, точку A можно выбрать таким образом, чтобы \vec{v}_o была равна нулю, в этом случае ось вращения, проходящая через точку A , является мгновенной осью вращения (*Мгновенная ось вращения* твердого тела – покоящаяся в лабораторной системе отсчета ось, относительно которой поступательная скорость тела равна нулю). Плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение вокруг некоторой мгновенной оси.

П.5.1.3. Движение с одной закрепленной точкой и свободное движение твердого тела.

Для твердого тела с одной неподвижной точкой справедлива теорема Эйлера: твердое тело, закрепленное в одной точке может быть переведено из одного положения в любое другое одним поворотом

вокруг неподвижной оси, проходящей через точку закрепления..

Таким образом, движение твердого тела, закрепленного в одной точке, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку закрепления.

В этом случае скорость любой точки твердого тела можно как линейную скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$.

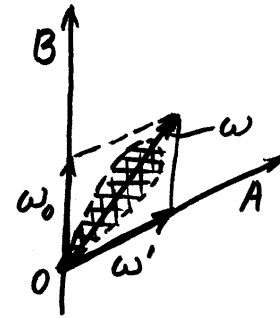


Рис.2

В ряде случаев движение тела с закрепленной точкой удобно представить как суперпозицию двух вращений вокруг пересекающихся осей.

Рассмотрим движение твердого тела, вращающегося вокруг двух пересекающихся осей – с угловой скоростью $\vec{\omega}'$ вокруг OA которая в свою очередь вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$ вокруг оси OB (рис.2).

За промежуток времени dt тело совершит поворот $d\vec{\varphi}'$ вокруг оси OA и поворот $d\vec{\varphi}_0$ вокруг оси OB. Так как малые угловые перемещения складываются как вектора, то для суммарного поворота можно записать $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_0 + d\vec{\varphi}'$. Разделив обе части этого равенства на dt получим

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}'$$

Ось, вокруг которой в данном случае вращается твердое тело (с угловой скоростью ω) непрерывно меняет свое положение в пространстве (так же как и ось OA), поэтому даже когда по модулю скорости ω_0 и ω' не меняются, тело будет обладать угловым ускорением, так как $\vec{\omega}$ меняется по направлению.

Свободное движение твердого тела.

Для произвольной точки A тела (см. рисунок) можно записать

$$\vec{R}_A = \vec{R}_0 + \vec{r}.$$

Скорость точки A так же, как и для плоского движения,

определяется из соотношения

$$\vec{V}_A = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Принимая за начало системы координат $x_0y_0z_0$ различные точки твердого тела (или точки вне его) можно получить бесконечно большое число разложений его движения на поступательное и вращательное. От выбора этой точки зависит скорость V_o , но угловая скорость (и угловое ускорение) от выбора этой точки не зависит.

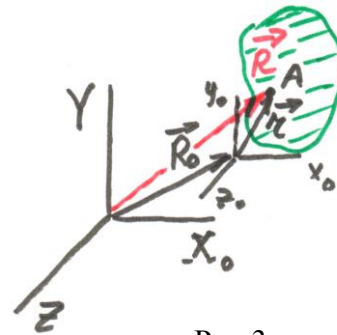


Рис.3

Можно показать, что произвольное движение твердого тела можно свести к суперпозиции вращательного движения вокруг мгновенной оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси.

П.5.2.Динамика твердого тела.

5.2.1. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса.

Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения для i -й материальной точки массы m_i имеет вид

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}$$

где \vec{F}_i - сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, \vec{f}_{ji} - сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы \vec{f}_{ji} и $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ коллинеарны.

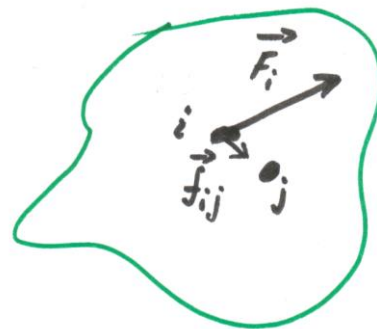


Рис.4

После векторного умножения уравнения движения на радиус-вектор \vec{r}_i и проведения простейших преобразований, получаем

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}.$$

Величина $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{V}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ (\vec{p}_i - импульс i -й

материальной точки) называется *моментом импульса* системы относительно точки, выбранной за начало координат. $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ -

момент внешних сил относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_j \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji}$

является моментом всех внутренних сил. Легко видеть, момент внутренних сил равен нулю.

То есть должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Это уравнение называется *уравнением моментов*.

В том случае, когда сумма моментов всех внешних сил равна нулю, получаем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

то есть

$$\vec{L} = const.$$

Таким образом, можно сформулировать *закон сохранения импульса*, обобщив его на систему тел:

«суммарный импульс системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю».

5.2.2. Основное уравнение вращательного движения. Момент инерции.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение моментов сводится к скалярному уравнению. В

частности, если ось вращения совпадает с осью координат z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

где L_z, M_z - проекции \vec{L} и \vec{M} на ось z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω скорость каждой материальной точки m_i тела будет равна $V_i = \omega \cdot \rho_i$, где ρ_i - ее расстояние до оси z . Проекция момента импульса на ось z для этих точек будет равна $L_{iz} = \rho_i m_i V_i = \omega m_i \rho_i^2$. Так как ω одинакова для всех точек системы, то момент импульса всего тела относительно оси z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2$$

называют моментом инерции тела относительно закрепленной оси. Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.

Таким образом, получаем **основное уравнение вращательного движения** тела вокруг закрепленной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z$$

Так как взаимное расположение точек в твердом теле не изменяется со временем, то момент инерции является постоянной величиной, и

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z,$$

При непрерывном распределении масс для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегрированием по всему объему тела и тогда для момента инерции можно записать:

$$J = \int \rho^2 dm.$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера. Если известен момент инерции J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс, то момент инерции тела J относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии a от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2,$$

где m - масса тела.

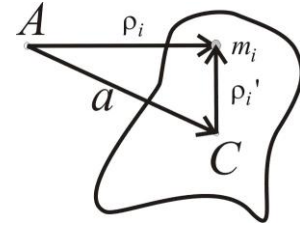


Рис.5

П.5.2.3. Тензор инерции.

Тензор инерции. Предположим, что твердое тело закреплено таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Введем в лабораторной системе отсчета декартову систему координат XYZ с началом в этой точке. Произвольная i -я точка твердого тела массы m_i будет иметь скорость $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, где $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения твердого тела, а \vec{r}_i - радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где в данный момент времени находится i -я материальная точка. Момент импульса этой точки равен по определению

$$\vec{L}_i \equiv m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i [\vec{\omega}(\vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \vec{\omega})].$$

Векторы $\vec{L}_i, \vec{\omega}, \vec{r}_i$ можно рассматривать как в проекциях на оси лабораторной системы координат XYZ , так и на оси системы xuz , жестко связанной с телом.

Перепишем выражение для \vec{L}_i в проекциях на оси жестко связанной с телом системы координат xuz , начало которой лежит в точке O . Учитывая, что

$$(\vec{r}_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \text{ а } \vec{r}_i \omega = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z, \text{ получаем}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{ix} = m_i [\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] = \\ \quad = m_i [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_y + x_i z_i \omega_z], \\ L_{iy} = m_i [\omega_y (x_i^2 + z_i^2) - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z], \\ L_{iz} = m_i [\omega_z (x_i^2 + y_i^2) - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y]. \end{array} \right.$$

Момент импульса всего тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных масс. В матричном виде можно записать.

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Совокупность 9 величин $J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}$ определяет *тензор инерции*

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выражение для момента импульса принимает точно такой же вид, если векторы $\vec{L}, \vec{\omega}, \vec{r}_i$ проецировать на оси лабораторной системы координат XYZ. Отличие заключается в том, что в покоящейся лабораторной системе координат постоянно меняются координаты x_i, y_i, z_i каждого бесконечно малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора \hat{J} меняются со временем. В выбранной системе координат x, y, z радиус-вектор \vec{r}_i - неизменная величина, а проекции угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - меняются со

временем.

Диагональные элементы тензора J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} называются **осевыми моментами инерции**. Недиагональные элементы $J_{xy}, J_{yx}, J_{xz}, J_{zx}, J_{yz}, J_{zy}$ называются **центробежными моментами инерции**.

Тензор инерции является симметричным, так как $J_{xy} = J_{yx}, J_{xz} = J_{zx}, J_{yz} = J_{zy}$. Симметричный тензор всегда можно привести к диагональному виду, то есть выбрать такую систему координат, определенную формой тела, в которой все недиагональные элементы будут равны нулю. Соответствующие направления координатных осей называются **главными осями инерции**, а величины $J_x \equiv J_{xx}, J_y \equiv J_{yy}, J_z \equiv J_{zz}$ - **главными моментами инерции**. Оси, проходящие через центр масс тела, будем называть **центральными осями**, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, будем называть **главными центральными осями**.

5.2.4. Вращение вокруг закрепленной оси. Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции. Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой закрепленной оси AA' , имеющей произвольное направление в пространстве. Представим радиус-вектор i -й материальной точки массы dm в виде $\vec{r}_i = \vec{d}_i + \vec{\rho}_i$, где $\vec{d}_i \parallel \vec{\omega}$, $\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$ (вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта). Так как ось AA' закреплена, то линейная скорость точки перпендикулярна этой оси и равна $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$. Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат xuz ось AA' (рис. 6) лежит в плоскости xu , а тензор инерции имеет диагональный вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Вектор угловой скорости будет иметь компоненты $\vec{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$. Тогда $L_x = J_x \omega_x, L_y = J_y \omega_y, L_z = 0$. Отсюда следует, что в общем случае ($J_x \neq J_y$) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, не совпадает с направлением вектора угловой скорости. Кроме того, в рассматриваемом случае положение вектора \vec{L} жестко связано с телом. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве. Конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси AA' . Вектор \vec{L} так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие — одну, совпадающую с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, и другую, перпендикулярную к нему, т.е. $\vec{L} = \vec{L}_{AA'} + \vec{L}_\perp$. В этом случае векторное уравнение моментов можно разбить на два скалярных уравнения:

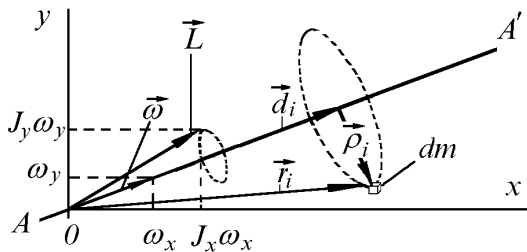


Рис.6 Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (2)$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp. \quad (3)$$

Здесь $M_{AA'}$ — проекция момента внешних сил на ось AA' (включая силы трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг закрепленной оси. После представления $L_{AA'} = \omega J$, где J — момент инерции тела относительно закрепленной оси, уравнение (2) принимает вид

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{AA'}.$$

В уравнении (3) m_{\perp} — это перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил, включая силы упругости, действующие на тело со стороны оси. Наличие этого момента приводит к повороту вектора L вокруг AA' . Уравнение (3) необходимо решать, если встает вопрос о деформациях, возникающих в оси.

Значение момента инерции J твердого тела относительно некоторой оси, можно найти, зная направление этой оси в пространстве и значения компонент тензора инерции. Выразим момент инерции относительно закрепленной оси AA' , проходящей через начало координат, через компоненты тензора \hat{J} .

Для этого запишем:

$$L_{AA'} = \frac{L_x \omega_x + L_y \omega_y + L_z \omega_z}{\omega} = L \cos \vartheta,$$

где ϑ - угол между векторами \vec{L} и $\vec{\omega}$.

Воспользуемся соотношениями

$$L_{AA'} = \omega J$$

$$L_{AA'} = L_x \cdot \cos \alpha + L_y \cdot \cos \beta + L_z \cdot \cos \gamma,$$

$$\omega_x = \omega \cdot \cos \alpha, \quad \omega_y = \omega \cdot \cos \beta, \quad \omega_z = \omega \cdot \cos \gamma,$$

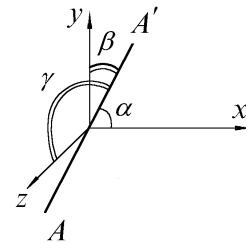


Рис.7. Положение оси AA' относительно системы координат.

здесь α, β, γ — углы, определяющие положение оси AA' относительно осей координат (см. рис.7). В частном случае, когда оси системы координат являются главными осями, получаем:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

П.5.2.5. Свободные оси.

Оси вращения, которые в отсутствие каких-либо связей могут сохранять свое положение в пространстве, называются **свободными осями** тела.

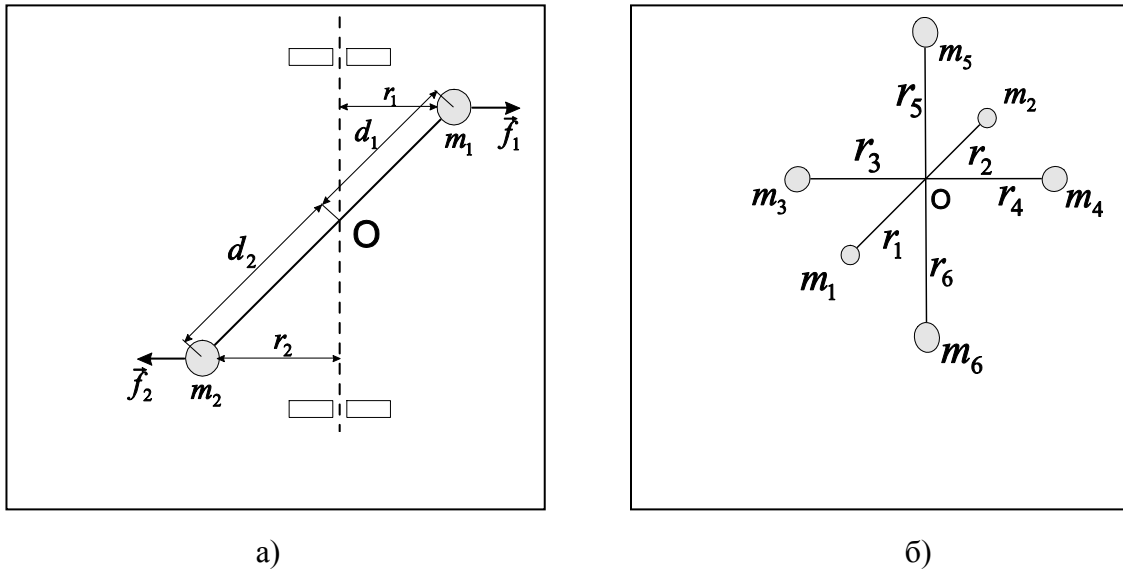


Рис.8

Устойчивое вращение твердого тела наблюдается относительно свободной оси, имеющей либо максимальный, либо минимальный момент инерции. Для оси, относительно которой тело имеет средний момент инерции, вращение будет неустойчивым.

П.5.2.6.Способы расчета моментов инерции и моменты инерции некоторых тел

При определении момента инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси его обычно представляют в виде совокупности малых элементов, находят момент инерции каждого элемента относительно выбранной оси и, затем, проводят суммирование (или интегрирование) по всему объему тела. Если форма тела является правильной геометрической фигурой, то процесс вычисления величины момента инерции значительно упрощается, а иногда могут быть использованы некоторые специальные способы, которые на отдельных примерах будут рассмотрены ниже.

- прямое интегрирование;
- использования подобия фигур;
- использование связи между моментами инерции относительно различных осей;
- Использование симметрии тел.

1* Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину (прямое интегрирование). Пусть тонкий стержень имеет длину l и массу m . Разделим его на малые элементы длины dx (рис. 9а), масса которых $dm = \frac{m}{l} dx$. Если выбранный элемент находится на расстоянии x от оси, то

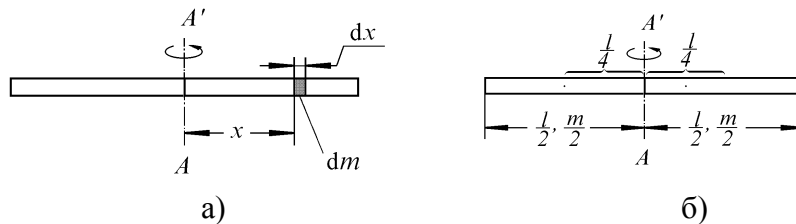


Рис.9. а) Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину, в виде совокупности малых элементов dx ;

б) К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину, с помощью метода подобия.

его момент инерции $dJ = x^2 dm$, т.е.

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до $l/2$ и удваивая полученное выражение (для учета левой половины стержня), получим

$$J = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = 2 \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}.$$

2* Определение момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину (метод подобия).

Будем считать, что рассматриваемый стержень состоит из двух половин (рис.9.б). Каждая из них имеет массу $m/2$ и длину $l/2$. Выражение для момента инерции стержня должно включать его массу и длину, так как это единственные параметры, определяющие его инерционные свойства при вращении. Пусть

$$J = kml^2,$$

где k — неизвестный коэффициент.

Для каждой из половин стержня при вращении вокруг оси AA' можно найти момент инерции, используя теорему Гюйгенса–Штейнера:

$$J_1 = k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2.$$

Полный момент инерции стержня

$$J = 2J_1 = 2 \left(k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2 \right).$$

Но этот же момент инерции, равен kml^2 . То есть

$$2k \frac{m}{2} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + 2 \frac{m}{2} \left(\frac{l}{4} \right)^2 = kml^2$$

или $\frac{k}{4} + \frac{1}{16} = k$. Следовательно,

$$k = \frac{1}{12},$$

т.е. $J = \frac{1}{12} ml^2$, что совпадает с выражением, полученным в результате прямого интегрирования.

3* Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей (использование связи между моментами инерции относительно различных осей). Для расчета моментов инерции прямоугольной пластинки со сторонами a и b и массой m выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис.10). Для прямоугольной пластинки легко вычислить моменты инерции относительно осей x и y . Рассмотрим, например, расчет J_x . Пластинку можно представить как совокупность тонких полосок, для каждой из которых момент инерции вычисляется так же, как для тонкой палочки длины a . Момент инерции пластинки относительно оси x равен сумме моментов инерции этих полосок, т.е.

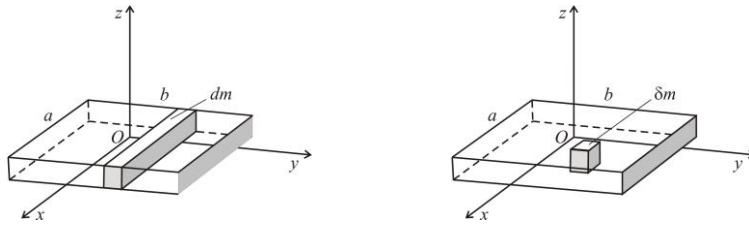


Рис.10. Выбор системы координат и представление пластинки в виде совокупности тонких полосок.

Рис.11. Представление пластинки в виде набора малых элементов

$$J_x = \sum J_{x_i} = \sum \frac{1}{12}(dm)a^2 = \frac{1}{12} ma^2.$$

Аналогично вычисляется момент инерции пластинки относительно оси y

$$J_y = \frac{1}{12} mb^2.$$

Для вычисления момента инерции пластинки относительно оси z воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим малый элемент массы δm (рис. 11). Его момент инерции δJ_z относительно оси z равен

$$\delta J_z = \delta m(x^2 + y^2),$$

т.е. можно записать, что

$$\delta J_x = \delta mx^2 + \delta my^2 = \delta J_x + \delta J_y,$$

где $\delta J_y, \delta J_x$ — моменты инерции этого малого элемента относительно осей y и x .

Это же соотношение справедливо не только для отдельного элемента, но и для любого плоского тела в целом. В этом легко убедиться, представляя плоское тело как совокупность отдельных малых элементов и производя суммирование по всем этим элементам.

Таким образом, получаем окончательное выражение для J_z :

$$J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2).$$

4* Момент инерции шара (использование симметрии тел).
 Сплошной шар массы m и радиуса R можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами dm , радиусом r , толщиной dr .

Рассмотрим малый элемент сферического слоя δm с координатами x, y, z . Его моменты инерции относительно осей x, y, z , проходящих через центр слоя — $\delta J_x, \delta J_y, \delta J_z$, равны

$$\delta J_x = \delta m(y^2 + z^2), \delta J_y = \delta m(x^2 + z^2), \delta J_z = \delta m(x^2 + y^2)$$

Таким образом, можно записать

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Так как для элементов сферического слоя $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, то

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m r^2.$$

После интегрирования по всему объему слоя получим

$$dJ_x + dJ_y + dJ_z = 2dmr^2.$$

Так как, в силу симметрии для сферического слоя

$$dJ_x = dJ_y = dJ_z = dJ, \text{ а } dm = m \frac{dV}{V} = m \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

то

$$dJ = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Интегрируя по всему объему шара, получаем

$$J = \int dJ = \int_0^R 2m \frac{r^4 dr}{R^3}.$$

Окончательно (после интегрирования) получим, что момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр равен

$$J = \frac{2}{5} m R^2.$$

П.5.3. Кинетическая энергия твердого тела.

П.5.3.1. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела и работа внешних сил.

Скорость i -й частицы тела, вращающегося вокруг закрепленной оси равна

$$v_i = \omega \rho_i.$$

Кинетическая энергия

$$K = \sum_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \rho_i^2 \omega^2$$

так как угловая скорость вращения для всех точек одинакова

Элементарную работу внешней силы найдем как приращение кинетической энергии тела

$$\delta A = d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = J \omega \cdot d\omega = M_{\parallel} \omega dt = M_{\parallel} d\varphi.$$

П.5.3.2. Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела

В системе центра масс кинетическая энергия равна

$$K = \sum_i \frac{m\vec{v}_i^2}{2} = \sum_i \frac{m(\vec{v}_0 + \vec{u}_i)^2}{2} = \sum_i \frac{m(\vec{v}_0^2 + 2\vec{v}_0\vec{u}_i + \vec{u}_i^2)}{2} = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{J_0\omega^2}{2}$$

здесь \vec{v}_0 - скорость центра масс. Так как $\sum_i m_i \vec{u}_i = 0$ (суммарный импульс частиц в системе центра масс равен нулю)

Теорема Кенига при плоском движении твердого тела кинетическая энергия равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения.

П.5.4. Гироскопы, волчки.

П.5.4.1. Движение гироскопа.

Гироскоп – быстро вращающееся симметричное твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.

При быстром вращении векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ совпадают по направлению – оба направлены вдоль оси гироскопа.

Прецессия гироскопа под действием внешних сил. Приближенная теория.

Рассмотрим поведение гироскопа, показанного на рисунке. При действии на него момента внешних сил со временем меняется направление вектора момента количества движения, поскольку векторы

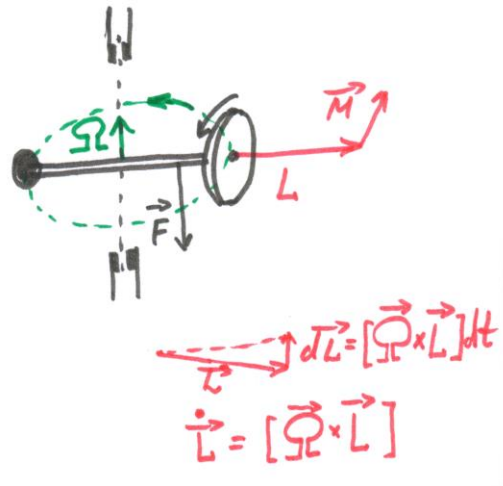


Рис.12

Так как векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ практически совпадают по направлению, то тело гироскопа будет совершать вращательное движение вокруг вертикальной оси. Говорят, что гироскоп совершает прецессию.

Пусть угловая скорость прецессии равна $\vec{\Omega}$, тогда

$$d\vec{L} = [\vec{\Omega} \times \vec{L}] \cdot dt.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \text{получаем уравнение, описывающее прецессию}$$

гироскопа

$$[\vec{\Omega} \times \vec{L}] = \vec{M},$$

В частности, если известен момент инерции гироскопа и его угловая скорость вращения, можно записать

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega}.$$

П.5.4.2. Гироскопические силы.

Рассмотрим воздействие гироскопа на рамку, в которой он закреплен.

При повороте рамки вокруг оси OO' будет поворачиваться и ось гироскопа и, соответственно менять свое направления вектор момента количества движения. Согласно уравнению моментов

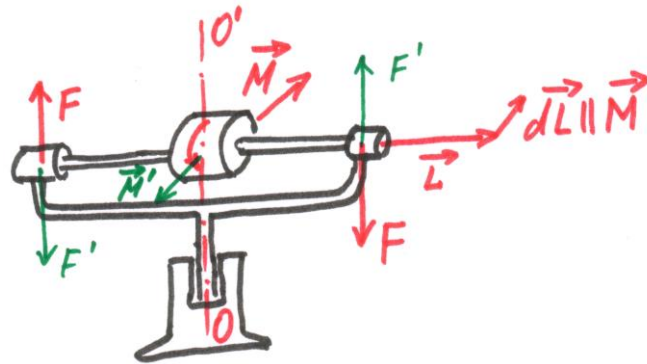


Рис.13

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

поворот вектора

\vec{L} обусловлен действием на гироскоп момента сил \vec{M} со стороны рамки. Возникновение момента \vec{M} обусловлено действием пары сил \vec{F} , показанных на рисунке. В соответствии с третьим законом Ньютона со стороны оси гироскопа на подшипники крепления будут действовать силы \vec{F}' . Эти силы называют гироскопическими. Появление гироскопических сил называют гироскопическим эффектом. Он проявляется у роторов турбин на кораблях при поворотах и качке, у винтовых самолетов на виражах. Он же является причиной того, что гироскоп в кардановом подвесе сохраняет направление своего вращения независимо от поворота подвеса.

Применение гироскопов – гироскомпас, гировертикаль, гиригоризонт, гироскопический успокоитель качки.

П.5.4.3. Волчки.

Волчками называют быстро вращающиеся осесимметричные тела, имеющие одну точку опоры. Важным отличием от гироскопов является то, что в общем случае волчки не имеют ни одной неподвижной точки. Обычно центр масс волчка располагается выше точки опоры. Для устойчивого вращения волчку нужно сообщить достаточно быстрое вращение. В этом случае волчок в процессе движения стремится занять вертикальное положение. Причиной такого

движения волчка является сила трения скольжения. Сила трения скольжения стремится ускорить прецессию волчка, что приводит к поднятию центра масс волчка. Величина угловой скорости, при которой наблюдается устойчивое вращение волчка, определяется его геометрическими размерами.