

Глава 6. Основы механики деформируемых тел.

П.6.1. Деформации и напряжения в твердых телах.

П.6.1.1. Упругая и остаточная деформация. Закон Гука.

Рассмотрим особенности возникновения упругих и остаточных деформаций на примере деформации растяжения или сжатия.

Деформацией растяжения или сжатия называется деформация, связанная с относительным удлинением или укорочением деформируемого участка. Проанализируем мысленно опыт с растяжением упругого стержня (рис.1). Если материал стержня однороден, то все одинаковые кусочки стержня будут растянуты одинаково при воздействии на стержень некоторой однородной нагрузки.

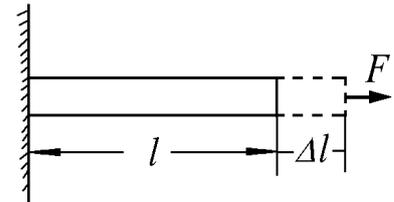


Рис.1. Схематическое представление деформации растяжения.

Такую деформацию можно охарактеризовать относительным удлинением ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

где Δl — удлинение отрезка стержня, имевшего первоначальную длину l . Для любого участка упругого стержня величина ε одинакова и зависит от величины растягивающей силы F . Под воздействием этой силы в стержне возникают внутренние силы взаимодействия (усилия) между различными участками стержня. Из условий равновесия каждого отдельного участка следует, что сумма сил, действующих на него, равна нулю, то есть в любом поперечном сечении стержня возникают усилия, равные F . Величину усилия, действующего на единицу площади поперечного сечения, называют напряжением и обозначают σ . Напряжение, возникающее в произвольном сечении растягиваемого стержня равно

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где S — площадь поперечного сечения стержня.

Будем постепенно увеличивать силу F . При небольших усилиях напряжение σ и относительное удлинение ε приблизительно пропорциональны друг другу. При больших значениях σ связь становится нелинейной. После снятия нагрузки тело снова может возвратиться в прежнее состояние. Область малых деформаций и напряжений, при которых отсутствуют остаточные деформации и связь между σ и ε является однозначной, называется областью упругих деформаций, а максимальное для этой области значение σ_y называется пределом упругости. При дальнейшем увеличении напряжения деформации перестают быть упругими, в теле возникают необратимые изменения. При еще большем увеличении

напряжения наблюдается значительное увеличение ε при малом изменении напряжения σ , эта область называется областью текучести (см. рис.2). Дальнейшее увеличение напряжения приводит к разрыву.

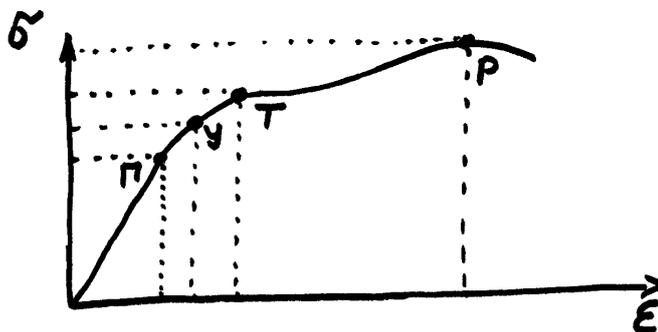


Рис.2

Здесь П- предел пропорциональности, У- предел упругости, Т- начало области текучести (предел текучести), Р – разрыв.

При малых напряжениях для любых деформаций существует область, для которой выполняется **закон Гука**: *деформации пропорциональны усилиям, которые их вызывают.*

П.6.1.2. Типы деформаций

Среди многочисленного разнообразия возможных деформаций принято выделять однородное растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб. Эти деформации наиболее просто поддаются анализу. В общем случае произвольный малый объем тела подвергается либо растяжению (сжатию), либо сдвигу, либо одновременному растяжению (сжатию) и сдвигу. Поэтому деформации **растяжение (сжатие)** и **сдвиг** принято называть **элементарными**.

Деформация растяжения сжатия. Область деформации растяжения-сжатия, в пределах которой выполняется соотношение

$$\sigma = E \cdot \varepsilon,$$

называется областью пропорциональности, а само соотношение называется **законом Гука для деформации растяжения-сжатия**. Постоянный коэффициент E имеет размерность Н/м^2 или Н/мм^2 и называется модулем Юнга. Для стали предел пропорциональности σ_n лежит близко к пределу упругости, но вообще они могут и не совпадать.

Деформация сдвига. Рассмотрим деформацию кубика, вырезанного из однородного изотропного вещества, под действием распределенных касательных сил, приложенных к его противоположным граням. Для соблюдения условий равновесия необходимо равенство всех напряжений, приложенных к граням кубика (рис.3а)

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4, \quad (1)$$

здесь τ_i — напряжение, определяемое как отношение силы, действующей на соответствующую грань, к площади этой грани. Действительно, для отсутствия поступательного движения кубика как целого необходимо

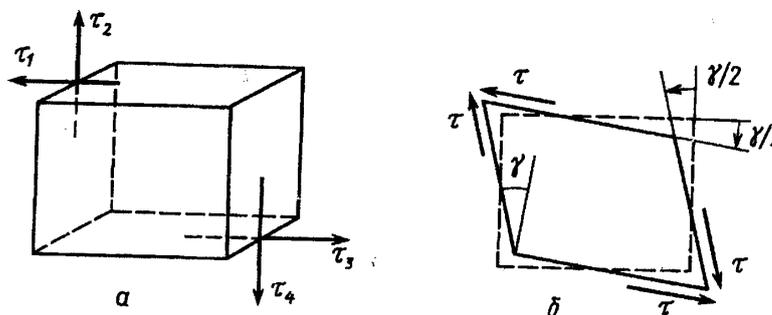


Рис.3. Деформация тела кубической формы под действием распределенных касательных сил

выполнение соотношений

$$\tau_1 = \tau_3, \quad \tau_2 = \tau_4,$$

а для отсутствия вращательного движения требуется, чтобы

$$\tau_1 = \tau_4, \quad \tau_2 = \tau_3,$$

откуда и следует равенство (1).

При изменении напряжений будут меняться только углы между гранями кубика (его объем при этом остается постоянным), (см. рис. 3 б). Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол γ . Опыт показывает, что для многих материалов существует область пропорциональности, где выполняется линейная связь между γ и τ (закон Гука для деформации сдвига)

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (2)$$

коэффициент G называется модулем сдвига.

Размерность модулей E и G одна и та же. Действительно, размерность модуля упругости

$$[E] = \left[\frac{P \cdot L}{S \cdot \Delta L} \right] = \left[\frac{P}{S} \right],$$

а размерность модуля сдвига

$$[G] = \left[\frac{P}{S \cdot \gamma} \right] = \left[\frac{P}{S} \right].$$

Материал	Модуль Юнга (ГПа)	Модуль сдвига (ГПа)	Предел текучести (ГПа)	Предел прочности при растяжении (ГПа)
Сталь	200-210	77-81	0.19-0.31	0.32-0.71

Медь	110-130	41.5-44	0.07	0.22
Алюминий	69-72	25-26.5	0.022	0.05
Свинец	14-18	5.5-8	0.005	0.014-0.018

Деформация изгиба. Если прямой упругий стержень неподвижно закрепить одним концом в твердой стенке, а к другому приложить силу F (рис. 4а), то стержень согнется. Легко понять, что при таком изгибе верхние слои стержня будут растягиваться, нижние - сжиматься, а некоторый средний слой, который называют нейтральным слоем, сохранит длину и только претерпит искривление. Перемещение λ , которое получает свободный конец стержня, называется стрелой прогиба. Стрела прогиба тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, зависит от формы стержня, его размеров и модуля упругости. Точный анализ деформаций и напряжений в упругом стержне довольно сложен. Приближенные результаты можно получить, используя так называемую гипотезу Бернулли о том, что в каждом малом объеме стержня происходит только деформация сжатия или растяжения.

Определим деформации стержня под действием момента силы, приложенной к его концу, $M = F \cdot L$. Выберем систему координат x, y жестко связанную со стержнем (рис. 4б). Предположим, что сечение стержня имеет симметричную форму (т.е. $a(y) = a(-y)$) (на рис. 4в)). Смещение оси стержня в результате действия силы F будем описывать функцией $u(x)$. Для определенности будем считать деформации в стержне достаточно малыми, то есть стрела прогиба $\lambda = u(L) \ll L$.

Мысленно вырежем из этого стержня кусочек малой длины dx (рис. 4б). При малых деформациях нормальное напряжение в каждом слое выделенного участка пропорционально его удлинению или укорочению и будет линейно изменяться при удалении от нейтрального слоя, который в нашем случае расположен по середине стержня (рис. 4г)

$$\sigma = \sigma_0(x) \frac{y}{b/2}, \quad (3)$$

где y — расстояние от данного слоя до нейтрального, $\sigma_0(x)$ - напряжение в самом удаленном слое, находящемся на расстоянии $\frac{b}{2}$ от нейтрального, x - координата элемента стержня dx .

На каждой слой толщиной dy и удаленный от нейтрального слоя на расстояние y действует усилие

$$dF = \sigma a(y) dy = \frac{2\sigma_0(x)a(y)}{b} \cdot y dy. \quad (4)$$

Причем результирующая всех нормальных усилий, действующих на поперечное сечение стержня, в силу условия (3) равна нулю, а момент всех этих усилий должен равняться моменту силы F относительно сечения с координатой x , $M(x) = F \cdot (L - x)$ (это соответствует выполнению условий равновесия для выделенного объема).

Момент всех нормальных усилий относительно нейтрального слоя в произвольном сечении с координатой x находим, интегрируя по всему сечению

$$M(x) = \int_{-b/2}^{b/2} y dF(y) = \frac{2\sigma_0(x)}{b} \int_{-b/2}^{b/2} a(y)y^2 dy = \frac{2\sigma_0(x)}{b} \cdot J. \quad (5)$$

Величина $J = \int_{-b/2}^{b/2} a(y)y^2 dy$ носит название момента «инерции» поперечного

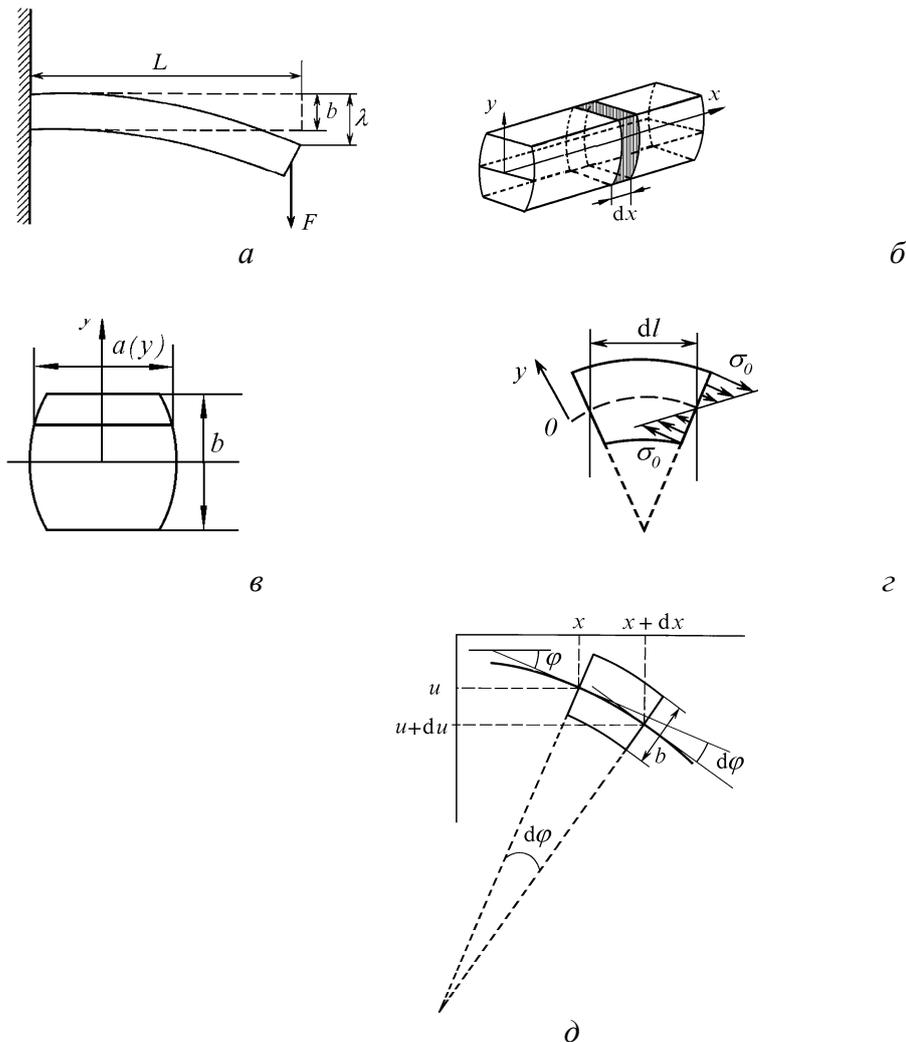


Рис. 4. Деформация изгиба стержня, закрепленного одним концом

сечения балки. Такое название обусловлено тем, что при изучении вращательного движения плоского тела встречается точно такая же формула для «настоящего» момента инерции (отличающаяся только на постоянный множитель). В частности, для стержня с прямоугольным сечением (рис.5, а)

$$J_a = \frac{1}{12} ab^3. \quad (6)$$

Для круглого стержня (рис.5, б)

$$J_б = \frac{1}{64} \pi d^4. \quad (7)$$

Для трубы (рис. 5, в)

$$J_6 = \frac{1}{64} \cdot \pi (d_2^4 - d_1^4). \quad (8)$$

Для трубы с прямоугольным сечением (рис. 5, з)

$$I_z = \frac{1}{12} (a_2 \cdot b_2^3 - a_1 \cdot b_1^3). \quad (9)$$

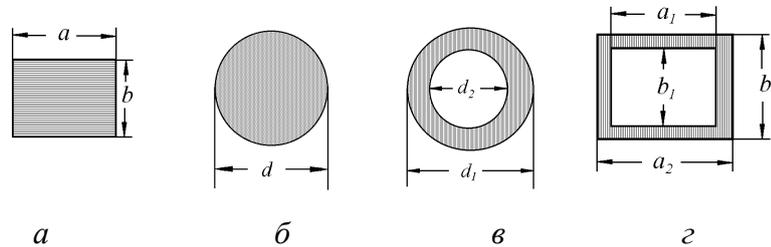


Рис. 5. Типичные сечения и геометрические размеры стержней и труб

Определим линию прогиба $u(x)$ стержня, закрепленного одним концом в стенке, под действием нагрузки P . При малой деформации стержня угол между направлением касательной к упругой линии в точке x равен (рис. 4, д)

$$\varphi = \frac{du}{dx}, \quad (10)$$

а изменение направления касательной при переходе от точки x к точке $x+dx$ равно

$$d\varphi = \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) dx = \frac{d^2u}{dx^2} dx.$$

Из рис. 4, з и рис. 4, д видно, что относительное удлинение слоя, наиболее удаленного от нейтрального, равно

$$\varepsilon(x) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{b}{2}. \quad (11)$$

Используя закон Гука, получаем для σ_0

$$\sigma_0(x) = E\varepsilon(x) = E \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Учитывая найденную связь между $M(x)$ и $\sigma_0(x)$ (5), получаем

$$M(x) = F(L-x) = \frac{2}{b} \cdot E \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \cdot J$$

Откуда получаем окончательно уравнение для определения зависимости $u(x)$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{F(L-x)}{E \cdot J}. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (12) от $x=0$ до $x=x'$ и учитывая, что $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0$, получаем

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x'} = \int_0^{x'} \frac{d^2u}{dx^2} dx = \frac{F}{E \cdot J} \left(Lx' - \frac{1}{2} x'^2 \right). \quad (13)$$

Интегрируя (13) еще раз от 0 до L , получаем, что стрела прогиба для стержня, закрепленного одним концом в стене, равна

$$\lambda = u(L) = \frac{F}{E \cdot J} \cdot \frac{L^3}{3}. \quad (14)$$

Деформация кручения. Примером деформации кручения является закручивание однородного круглого стержня, когда одно основание стержня поворачивается вокруг оси на некоторый угол ω относительно другого основания (рис. 6а). Угол кручения при малых деформациях определяется законом Гука и связан с моментом сил M , закручивающих стержень

$$M = f \cdot \omega, \quad (15)$$

где f —модуль кручения.

Очевидно, что для каждого малого объема в рассматриваемом случае происходит деформация сдвига. Поэтому значение модуля сдвига должно определяться формой тела и модулем сдвига.

Если стержень однородный, то для любого выделенного участка стержня длиной dl основания этого участка повернутся на один и тот же угол $d\omega$ относительно друг друга. Причем между $d\omega$ и углом поворота ω оснований для всего стержня выполняется соотношение

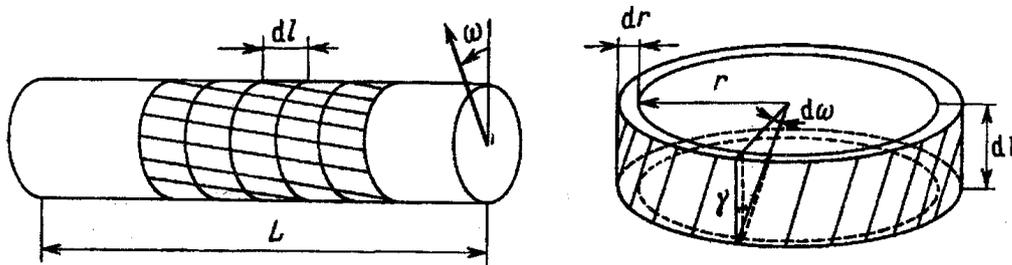


Рис. 6. Закручивание однородного круглого стержня

$$d\omega = \frac{dl}{l} \cdot \omega, \quad (16)$$

где l —длина стержня. Выделим из участка dl кольцо с радиусом r и толщиной dr . Из рис. 6б видно, что угол кручения $d\omega$ связан с углом γ для деформации сдвига элементарного объема простым соотношением

$$\gamma \cdot dl = d\omega \cdot r. \quad (17)$$

Здесь учтено, что углы γ и $d\omega$ малы и $\sin \gamma \approx \gamma$, $\sin(d\omega) \approx d\omega$. Касательное усилие на поверхности кольца площадью $2\pi r dr$ определим, используя соотношения (14) и (17)

$$\tau(2\pi r \cdot dr) = (2\pi r dr) \cdot G \cdot \gamma = 2\pi r^2 G \frac{d\omega}{dl} dr.$$

Момент этого усилия относительно оси стержня равен

$$dM = 2\pi r^3 G \frac{d\omega}{dl} \cdot dr.$$

Суммарный момент внутренних сил, действующих в произвольном сечении стержня, найдем, интегрируя по радиусу

$$M = 2\pi G \frac{d\omega}{dl} \int_0^R r^3 dr = \frac{G\pi \cdot R^4 d\omega}{2 dl}, \quad (18)$$

где R — радиус стержня.

Этот момент одинаков во всех поперечных сечениях стержня и равен моменту сил, закручивающему стержень. Используя (16) получаем

$$M = \frac{G\pi R^4 \omega}{2 l}. \quad (19)$$

Учитывая (17), находим связь между модулем кручения и модулем сдвига

$$f = \frac{G\pi R^4}{2l}. \quad (20)$$

П.6.2. Коэффициент Пуассона.

При одностороннем растяжении стержня кроме изменения длины изменяются также его поперечные размеры. Относительное изменение поперечного размера определяется равенством

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta l_{\perp}}{l_{\perp}}, \quad (21)$$

где l_{\perp} и Δl_{\perp} - линейный поперечный размер стержня и его изменение. Величина

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} = -\frac{(\Delta l_{\perp} / l_{\perp})}{(\Delta l / l)} \quad (22)$$

называется коэффициентом Пуассона. Знак «минус» учитывает, что при растяжении поперечные размеры уменьшаются, а при сжатии увеличиваются.

Пусть имеется куб со стороной l и объемом $V = l^3$. При растяжении его объем изменится

$$V' = l(1 + \varepsilon) \cdot l^2(1 + \varepsilon_{\perp})^2 = V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}) \quad (23)$$

(здесь отброшены члены второго порядка малости). Из (22) следует, что

$$\frac{(V' - V)}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (24)$$

При растяжении объем тела увеличивается, при сжатии уменьшается, поэтому ΔV и ε в (6.3.4) одного знака, а значит,

$$\mu \leq \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Таким образом, максимальное значение коэффициента Пуассона равно $\mu_{\max} = \frac{1}{2}$. В этом случае при растяжении и сжатии объем тела не изменяется.

П.6.3. Связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

Для кристаллического анизотропного тела, упругие свойства которого зависят от выбранного направления, существует зависимость каждой компоненты тензора деформаций от всех компонент тензора напряжений. В случае изотропного тела достаточно только двух коэффициентов, чтобы установить связь между деформациями и напряжениями. В частности, для произвольной деформации однородного кубика выполняются соотношения (индексами 1,2,3 обозначены соответствующие координатные оси)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_1 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}((1 + \mu)\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)).\end{aligned}\tag{26}$$

Действительно, пусть к малому элементу объема приложены произвольные напряжения, тогда относительное удлинение вдоль, например оси 1 будет меньше величины $\frac{\sigma_1}{E}$ на величину дополнительного сжатия, возникающего из-за действия растягивающих усилий по осям 2 и 3, то есть

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right),\tag{27}$$

откуда и следует первое равенство из (26), аналогичные соотношения выполняются и при рассмотрении удлинений вдоль других осей.

Соотношения (26), позволяют определить изменение объема при произвольной деформации и связь между модулем Юнга и модулем сдвига.

Пусть деформации подвергается тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3 . Под действием приложенных напряжений при малых деформациях объем тела изменится на величину

$$\Delta V = \Delta(l_1 l_2 l_3) - l_1 l_2 \Delta l_3 + l_1 \Delta l_2 l_3 + \Delta l_1 l_2 l_3,$$

т.е.

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta l_2}{l_2} + \frac{\Delta l_3}{l_3} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\tag{28}$$

Пример.1 Всестороннее сжатие.

При *всестороннем сжатии*, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, учитывая (26), получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu).\tag{29}$$

Деформация сдвига.

При деформации сдвига изменения объема не происходит, то есть

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (30)$$

поэтому из (26) получаем

$$\frac{1}{E}(1-2\mu)\sigma_1 + \frac{1}{E}(1-2\mu)\sigma_2 + \frac{1}{E}(1-2\mu)\sigma_3 = 0$$

Таким образом, деформация сдвига возможна только при выполнении условия

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (31)$$

Подставляя это условие в (26), получаем

$$\varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{1+\mu}{E}\sigma_3, \quad (32)$$

Таким образом, деформация сдвига сопровождается изменением

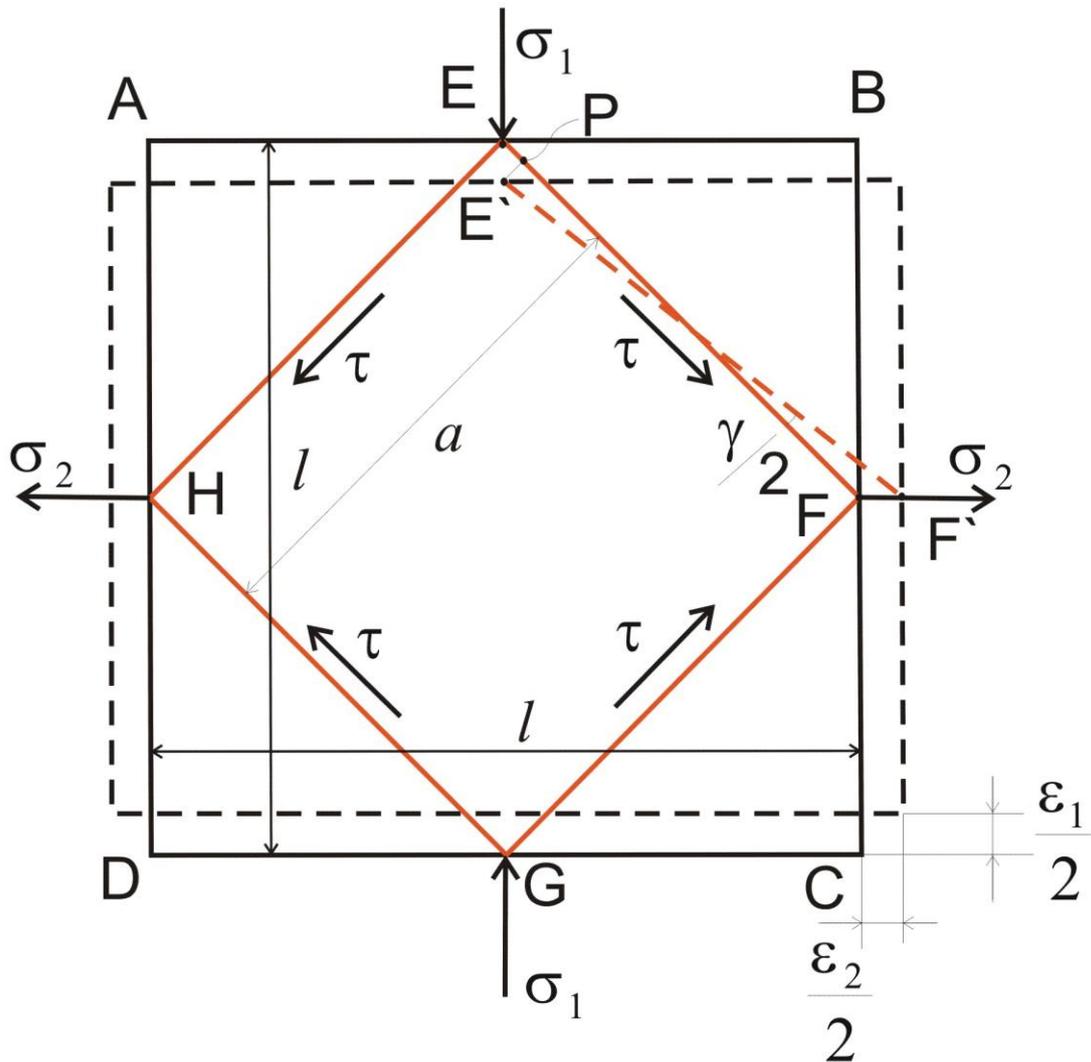


Рис.7. Деформация параллелепипеда с квадратным основанием

размеров выделенного объема, то есть деформацией растяжения (сжатия).

Таким образом, деформация, для которой выполняется соотношение (31) может одновременно рассматриваться либо как деформация растяжения (сжатия) либо как деформация сдвига. При этом между величинами модуля Юнга E и модуля сдвига G наблюдается корреляция.

Рассмотрим это утверждение более подробно на основе анализа деформации параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной $l = l_1 = l_2$ (Рис.7). Для простоты выберем случай, когда напряжение вдоль высоты параллелепипеда равно нулю, т.е. $\sigma_3 = 0$. Пусть $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$. В этом случае выполняется соотношение (30), при этом $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$. Рассмотрим деформацию параллелепипеда с основанием $EFGH$, повернутым относительно $ABCD$ на угол $\frac{\pi}{4}$ ($ABCD$ - основание параллелепипеда со сторонами равными l и совпадающими с направлениями осей координат 1 и 2). Сторона квадрата $EFGH$ равна $a = \frac{l}{\sqrt{2}}$. В связи с тем, что $|\sigma_1| = |\sigma_2|$, то на стороны квадрата будут действовать только касательные усилия τ , а его деформация является деформацией сдвига. Изменение углов между сторонами квадрата $EFGH$ можно выразить через относительные измерения длин его диагоналей ε_1 и ε_2 (см.рис.7). Учитывая, что $EO = \frac{l \cdot \sqrt{2}}{4}$, а также (32), получаем

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(\frac{EE'}{\sqrt{2}}\right)}{EO} = \frac{\varepsilon_1 \cdot l}{\frac{l}{4} \cdot \sqrt{2}} = \varepsilon_1 = \frac{1 + \mu}{E} \cdot \sigma_1. \quad (33)$$

Учитывая, что напряжение, действующее на площадку, равно отношению силы к площади, на которую она действует, получаем

$$\tau = \frac{\sqrt{\left(\sigma_1 \cdot \frac{l}{2} l_3\right)^2 + \left(\sigma_2 \cdot \frac{l}{2} l_3\right)^2}}{al_3} = \frac{\left(\sigma_1 \cdot \frac{l}{2} l_3\right) \cdot \sqrt{2}}{\frac{l}{\sqrt{2}} l_3} = \sigma_1. \quad (34)$$

Из (33) и (34) следует

$$\gamma = \frac{2(1 + \mu)}{E} \cdot \tau.$$

Так как для деформации сдвига должно выполняться соотношение (2), то получаем связь между модулем Юнга и модулем сдвига

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (35)$$

П.6.5. Энергия упругих деформаций.

Рассмотрим работу, затрачиваемую на малую упругую деформацию. В качестве объема рассмотрим кубик. При растяжении кубика на величину dx затрачивается работа

$$dA_{\sigma} = f dx = (\sigma l^2) (d\varepsilon' \cdot l) = \sigma \cdot l^3 d\varepsilon', \quad (36)$$

$$\text{где } \varepsilon' = \frac{\Delta l}{l}, d\varepsilon' = d\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = \frac{dx}{l}.$$

При растяжении (или сжатии) на величину Δl для работы получим

$$A_{\sigma} = \int_0^{\varepsilon} l^3 \sigma(\varepsilon') d\varepsilon'.$$

Аналогично несложно показать, что результирующая работа при деформации сдвига кубика равна

$$A_{\tau} = \int_0^{\gamma} l^3 \tau(\gamma') d\gamma'.$$

В общем случае работа идет на увеличение потенциальной энергии деформации и на нагревание тела (если деформация неупругая)

На линейном участке (Рис.2) получим

$$A_{\sigma} = \int_0^{\varepsilon} l^3 \sigma(\varepsilon') d\varepsilon' = l^3 \cdot E \int_0^{\varepsilon} \varepsilon' \cdot d\varepsilon' = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 l^3 \quad (37)$$

$$A_{\tau} = \int_0^{\gamma} l^3 \tau(\gamma') d\gamma' = l^3 \cdot G \int_0^{\gamma} \gamma' \cdot d\gamma' = \frac{1}{2} G \gamma^2 l^3 \quad (38)$$

Из (37) и (38) для объемной плотности энергии деформации имеем:
для деформации растяжения (сжатия)

$$w_{\sigma} = \frac{A_{\sigma}}{l^3} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2, \quad (39)$$

для деформации сдвига

$$w_{\tau} = \frac{1}{2} G \gamma^2 \quad (40)$$