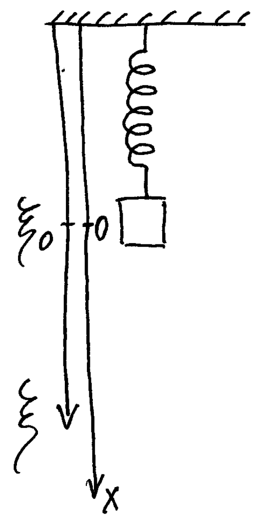
Глава 7. Колебания

П.7.1. Свободные колебания систем с одной степенью свободы.

П.7.1.1. Свободные колебания в простейших консервативных системах.



В качестве простейшей колебательной системы рассмотрим груз, подвешенный на пружине в поле силы тяжести. Предположим, что груз может совершать только вертикальные колебания. Будем считать, что система является консервативной, то есть в ней отсутствуют силы трения. Уравнение движения этого груза будет иметь вид

$$m\ddot{\xi} = f_{\text{упр}} + mg\,,$$

где m - масса груза, ξ - его координата, $f_{\text{упр}} = -k\xi$ - возвращающая сила, возникающая при растяжении или сжатии пружины, здесь принято, что координата груза для нерастянутой пружины равна нулю, mg - сила тяжести, k - коэффициент жесткости пружины. В положении равновесия $(\xi = \xi_0)$ сумма всех сил, действующих на тело равна нулю. То есть $k\xi_0 = mg$. Переходя к новой переменной $x = \xi - \xi_0$, получаем

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1}$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{2}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - циклическая (круговая) частота. Это уравнение называется уравнением свободных гармонических колебаний.

Его решение имеет вид

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0\, t + \varphi)\,,$$

где A_0 амплитуда колебаний, а $\Phi(t) = \omega_0\, t + \varphi$ - фаза колебаний. Величина $\varphi = \Phi(0)$ определяет значение фазы в момент времени $t = 0$ и называется начальной фазой колебаний.

Амплитуда A_0 и начальная фаза φ колебаний определяются начальными условиями. Если в начальный момент времени смещение маятника равно x_0, а начальная скорость v_0, то

$$x(0) \equiv x_0 = A_0 \cos\varphi\,,$$

$$\dot{x}(0) \equiv v_0 = -A_0\, \omega\, \sin\varphi\,.$$

Отсюда получаем

$$\varphi = -arctg\frac{v_0}{x_0\omega}.$$

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 1.$$

Для рассматриваемых колебаний не только смещение, но и скорость, и ускорение являются гармоническими функциями времени

$$\upsilon(t) = \dot{x}(t) = -A_0\omega\sin(\omega t + \varphi) = A_0\omega\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

$$a(t) = \dot{x}(t) = -A_0\ \omega_0^2\ \cos(\omega_0 t + \varphi) = A_0\omega^2\cos(\omega_0 t + \pi + \varphi).$$

При этом колебания скорости опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания смещения $x(t)$ и имеют амплитуду ωA_0. Колебания ускорения происходят в противофазе с колебаниями смещения и имеют амплитуду $\omega^2 A_0$.

Так как в рассматриваемой системе отсутствуют силы трения, то полная энергия колебаний с течением времени не изменяется, причем наблюдается периодическая перекачка кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Величина кинетической энергии в этом случае будет

$$E_{кин} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi),$$

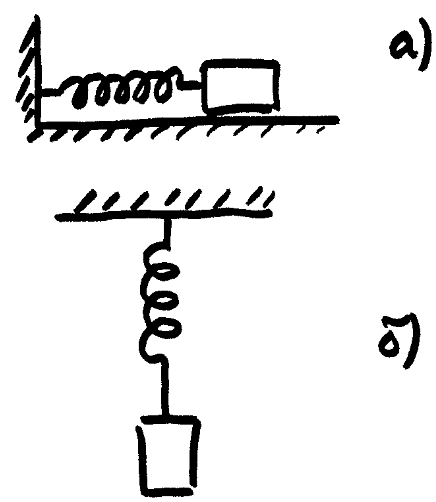
потенциальной энергии упругой деформации:

$$E_{пот} = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{m}\cdot\frac{mx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi),$$

Полная механическая энергия не зависит от времени и равна

$$E_{пол} = E_{кин} = E_{пот} = \frac{m\omega^2 A_0^2}{2}.$$

П.7.1.2.Затухающие колебания.



Рассмотрим на примере пружинного маятника основные закономерности свободных колебаний при наличии силы трения. Уравнение движения пружинного маятника при наличии силы трения имеет вид

$$m\ddot{\xi} = f_{упр} + f_{тр} + mg.$$

Наиболее простое решение уравнение имеет в том случае, когда сила трения пропорциональна скорости. Такая ситуация реализуется для вязкого трения при малых скоростях, когда сила трения направлена против направления вектора скорости, а ее величина пропорциональна первой степени скорости $f_{тр} = -h\xi$, где h- коэффициент вязкого трения. После замены переменных $x = \xi - \xi_0$ уравнение перепишется в виде

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0. \qquad (3)$$

В нормированном виде уравнение затухающих колебаний имеет вид

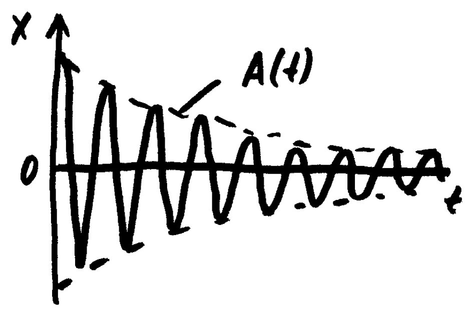
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (4)$$

где $\delta = \dfrac{h}{2m}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, A_0, φ - определяются начальными условиями.



Колебания маятника при наличии затухания не являются периодическими, их амплитуда меняется со временем. Условно говорят, что периодом таких колебаний является $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, подразумевая под этим временной интервал между соседними моментами времени, когда смещение $x(t) = 0$. Также условно амплитудой этих колебаний считают модуль максимального отклонения $A_0 e^{-\delta t}$ в каждом периоде колебаний.

Таким образом, затухание колебательного процесса определяется величиной δ, которая получила название ***коэффициента затухания***. Величина, обратная δ, равная $\tau = \dfrac{1}{\delta}$, получила название ***времени затухания*** квазипериодического процесса и указывает интервал времени, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Пусть в момент времени t_1 амплитуда будет $A_1 = A_0 e^{-\delta t_1}$, а в момент $t_2 = t_1 + T$ соответственно

$$A_2 = A_0 e^{-\delta t_2} = A_0 e^{-\delta(t_1+T)}.$$

Тогда отношение амплитуд $A_1 / A_2 = e^{\delta T}$ и изменение амплитуды за период будет характеризоваться величиной $\theta = \delta T$, получившей название ***логарифмического декремента затухания***, причем

$$\theta = 1n\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Отношение амплитуд, разделенных интервалом времени в N периодов, будет

$$\frac{A_1}{A_{N+1}} = e^{\delta NT} = e^{N\theta}.$$

Отсюда следует, что число условных периодов N_1, после которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз $(N_1\theta = 1)$ равно

$$N_1 = \frac{1}{\theta}.$$

П.7.2. Вынужденные колебания.

П.7.2.1. Уравнение вынужденных колебаний и его решение.

Так же как и в предыдущих пунктах рассмотрим колебание груза на пружине. При наличии внешней периодической силы $F_{вн}(t)$ оно примет вид

$$m\ddot{x} = f_{упр} + f_{тр} + F_{вн}(t).$$

Отметим, что рассматриваемое уравнение является линейным, то есть величина возвращающей силы пропорциональна смещению. Произвольную периодическую силу $F(t)$ можно разложить в ряд Фурье, то есть представить ее в виде суммы слагаемых, изменяющихся во времени по гармоническому (синусоидальному) закону. Тогда в силу принципа суперпозиции для анализа колебаний, возникших в системе под действием произвольной внешней периодической силы $F_{вн}(t)$, достаточно знать поведение этой системы под действием гармонической силы определенной частоты.

В нормированном виде уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t. \tag{5}$$

Известно, что общее решение любого неоднородного дифференциального уравнения можно представить в виде суммы частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения $(f_0 = 0)$, то есть решением уравнения вынужденных колебаний будет функция

$$x(t) = x_1(t) + De^{-\delta t}\cos(\Omega t + \varphi_0).$$

Здесь $x_1(t)$ соответствует вынужденным колебаниям (частное решение неоднородного уравнения), а второй член - затухающим собственным колебаниям (общее решение однородного уравнения).

Следует отметить, что сложная зависимость смещения от времени наблюдается лишь при малых временах. Через время $t = (4-5)\tau$ ($\tau = \dfrac{1}{\delta}$-время затухания) собственные колебания практически затухнут, и в системе будут наблюдаться лишь вынужденные колебания

$$x\,(t)=x_1(t)=X_0\cos(\omega t+\varphi),$$

где

$$X_0=f_0\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2}}\,.$$

$$tg\varphi=-\frac{2\omega\,\delta}{\omega_0^2-\omega^2},$$

П.7.2.2. Резонанс. Амплитудные и фазовые резонансные кривые.

Амплитудно-частотная характеристика имеет резонансный вид, то есть в некоторой области частот амплитуда колебаний значительно превышает величину f_0. Для определения резонансной частоты, при которой X_0 достигает максимума необходимо найти минимум функции

$$(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\delta^2\omega^2\,.$$

Минимальным значение этой величины будет при

$$\omega_{\text{рез}}^2\equiv\omega_{\text{рх}}^2=\omega_0^2-2\delta^2\,.$$

При этом

$$X_{0\ \text{рез}}=\frac{f_0}{2\delta\,\omega_0}$$

Для случая малого затухания ($\omega_0^2>>\delta^2$), можно считать $\omega_{\text{рез}}\approx\omega_0$.

Рассмотрим амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для скорости и ускорения.

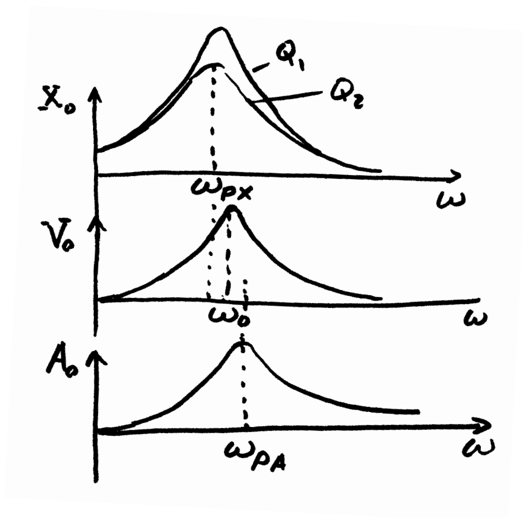
Для скорости

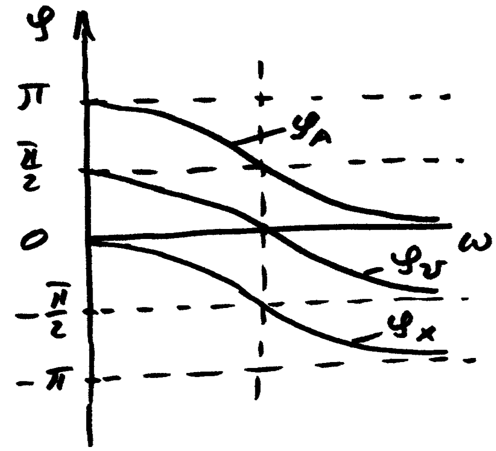
$$\dot{x}_1=f_0\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega}\right)^2+4\delta^2}}\cdot\cos(\omega t-\frac{2\omega\delta}{\omega_0^2-\omega^2}+\frac{\pi}{2}),$$

для ускорения

$$\ddot{x}_1=f_0\cdot\frac{1}{\sqrt{(\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}-1)^2+4\dfrac{\delta^2}{\omega^2}}}\cdot\cos(\omega t-\frac{2\omega\,\delta}{\omega_2^2-\omega^2}+\pi)\,.$$

Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для смещения, скорости и ускорения маятника представлены на рисунке.





В области частот $\omega \approx \omega_0$ происходит резкое изменение фазы. Чем меньше затухание в системе, тем более резкой является эта зависимость. Во всех случаях скорость опережает внешнюю силу по фазе на $\frac{\pi}{2} + \varphi$, а ускорение опережает внешнюю силу по фазе на $\pi + \varphi$. При резонансе скорость совпадает по фазе с внешней силой.

П.7.2.3.Добротность.

При анализе резонансных свойств колебательных систем наряду с показателем δ и логарифмическим декрементом затухания (θ) широко пользуются величиной, которая называется добротностью системы Q. Для механических систем она определяется как отношение амплитуды смещения при резонансе $- X_{0\ \text{рез}}$ к амплитуде смещения $X_{0\ cm}$, когда $\omega \to 0$:

$$Q = \frac{X_{0\ рез}}{X_{0\ cm}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{2\pi}{2\delta T} = \frac{\pi}{\theta}.$$

При увеличении добротности резонансная кривая становится более узкой. Чтобы оценить ее ширину найдем $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$, где ω_1 - частота, при которой амплитуда уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. То есть

$$\frac{X_{0\ рез}}{X_1} = \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}{2\delta\,\omega_{1_0}} = \sqrt{2}\,.$$

При выполнении условия $\delta << \omega$ будет выполняться приближенное равенство $\omega_1 \approx \omega_0$, поэтому

$$(\Delta\omega 2\omega_0)^2 + 4\delta^2\omega_0^2 = 8\delta^2\omega_0^2,$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$. Из последнего соотношения следует, что $\Delta\omega = \delta$. Обычно эту величину называют полушириной резонансной кривой. Таким образом, для малых δ выполняется соотношение

$$Q = \frac{\omega_0}{2 \cdot \Delta \omega}.$$

П.7.2.4. Соотношение между силами при резонансе.

Средняя за период мощность внешней гармонической силы равна

$$N = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)v(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T F_0 \sin\omega t \cdot V_0 \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})dt =$$

$$\frac{1}{T}F_0V_0\int_0^T \sin\omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi_V)dt = \frac{1}{2}F_0V_0\cos\varphi_V$$

При резонансе φ_V=0, а амплитуда скорости максимальна, поэтому осциллятору извне подводится максимальная мощность

Легко показать, что на резонансной частоте в каждый момент времени внешняя сила и сила трения компенсируют друг друга, а амплитуда силы упругости достигает максимального значения

$$F_{упр.0} = -kX_0 = -\frac{k}{2\delta\,\omega_0}\cdot\frac{F_0}{m} = -\frac{\omega_0}{2\delta}\cdot F_0$$

П.7.2.5.Установление колебаний.

Особенности установления колебаний наиболее просто рассмотреть для частного случая, когда $\omega = \omega_0$.

Для этого случая решение уравнения колебаний в произвольный момент времени имеет вид

$$x(t) = x_1(t) + De^{-\delta t}\cos(\Omega t + \varphi).$$

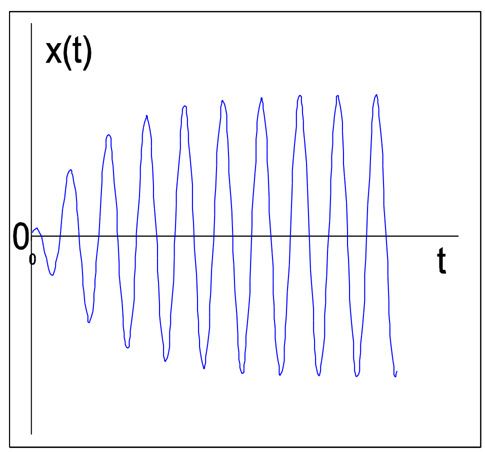
Для малого затухания в начальный момент времени

$$x(0) = x_1(0) + D.$$

В том случае, когда $x(0) = 0$, получаем,

$$D = -x_1(0) = X_{0рез}$$

и типичная зависимость смещения от времени при установлении колебаний будет иметь следующий вид (см. рисунок)



П.7.3. Сложение колебаний.

П.7.3.1. Биения.

Если в системе одновременно возбуждаются два колебания, причем смещения происходят вдоль одного направления, то результирующее колебание будет суммой этих двух. Рассмотрим случай, когда оба колебания имеют одинаковые амплитуды.

Для суперпозиции двух колебаний можно записать. $x = x_1 + x_2 = x_{01}\cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + x_{02}\cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$.

Если амплитуды колебаний одинаковы, то

$$x = x_0\left(\cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})\right) =$$

$$2x_0\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + (\varphi_{02} + \varphi_{01})\right) =$$

$$2x_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + (\varphi_{02} + \varphi_{01})\right)$$

В том случае, когда частоты близки, колебания имеют вид биений – их амплитуда медленно меняется во времени по закону

$$A = 2x_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right).$$

П.7.3.2. Фигуры Лиссажу.

Пусть колебания маятника происходят в двух взаимно перпендикулярных направлениях

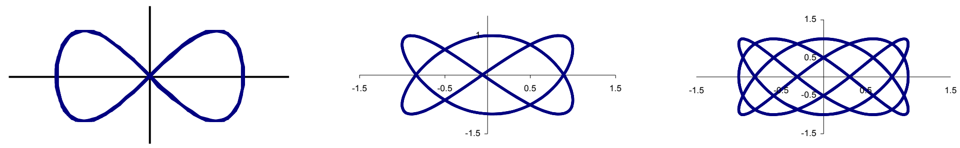
$$x_1 = x_{01}\cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = x_{02}\cos(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

Если частоты равны, $\omega_1 = \omega_2$, то уравнение траектории тела маятника будет иметь вид эллипса

$$\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_{02}}\right)^2 - 2\frac{x_1}{x_{01}}\cdot\frac{x_2}{x_{02}}\cdot\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)\ .$$

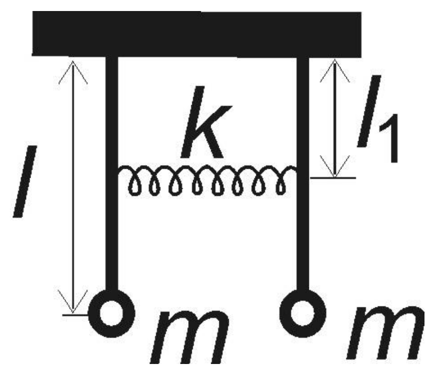
Если ω_1 и ω_2 не совпадают, но являются кратными ($m\omega_1 = n\omega_2$), то траектории также являются замкнутыми кривыми, называемыми ***фигурами Лиссажу.***Для нескольких частных случаев такие кривые представлены на следующем рисунке



m=1, n=2 m=2,n=3 m=3,n=5

7.4. Колебания в связанных системах.

Многие колебательные системы представляют собой системы двух или нескольких связанных между собой осцилляторов. Примерами могут служить молекулы (атомы, взаимодействующие между собой), маятники, колеблющиеся вокруг одной оси (связь осуществляется посредством упругих сил), связанные электрические контуры. Особенности колебаний в таких системах рассмотрим на примере двух связанных маятников.



В общем случае система уравнений, описывающая движение двух связанных маятников имеет вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \lambda_2 x_1 = 0, \qquad (6)$$

здесь x_1, x_2 - отклонения маятников от положения равновесия, ω_{01}, ω_{02} - частоты собственных колебаний маятников (парциальные частоты), λ_1, λ_2 - коэффициенты, определяющие величину связи между маятниками.

В частном случае для системы, показанной на рисунке при малых отклонениях от положения равновесия

$$ml^2\ddot{\alpha}_1 = -mgl\alpha_1 + kl_1^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$ml^2\ddot{\alpha}_2 = -mgl\alpha_2 - kl_1^2(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2}$$

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2}}, \omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2}},$$

П.7.4.2. Моды колебаний.

Решением системы уравнений (6) являются

$$2\omega_{1,2}^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02})^2 + 4\lambda_1\lambda_2}\,, \qquad (7)$$

$$2k_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1}(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \mp \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02})^2 + 4\lambda_1\lambda_2})\,, \qquad (8)$$

где $k = \dfrac{x_{20}}{x_{10}}$.

Здесь верхний знак перед корнем относится к ω_1 и k_1, а нижний - к ω_2 и k_2.

Общее решение системы (6) имеет вид

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \psi_1) + B\cos(\omega_2 t + \psi_2)\,,$$

$$x_2 = k_1 A\cos(\omega_1 t + \psi_1) + k_2 B\cos(\omega_2 t + \psi_2)\,,$$

где амплитуды и фазы A, B, ψ_1, ψ_2 определяются начальными условиями, а частоты ω_1, ω_2 и коэффициенты k_1, k_2 не зависят от начальных условий и определяются только свойствами колебательной системы.

Таким образом, хотя в общем случае произвольное колебание маятников не является гармоническим, тем не менее, его всегда можно представить как сумму двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Эти колебания носят название нормальных колебаний, а частоты ω_1 и ω_2 - нормальных частот. Каждое нормальное колебание системы является совокупностью колебаний обоих маятников, оно характеризуется частотой ω_1 или ω_2, а также определенным соотношением между амплитудами колебаний (амплитуды отличаются соответственно в k_1 или k_2 раз).

Нормальные колебания можно выделить в любой колебательной системе, состоящей из произвольного числа маятников, если движение этой системы описывается системой уравнений типа. В том случае, когда в системе возбуждено одно нормальное колебание, каждый маятник колеблется по гармоническому закону с частотой этого колебания, а амплитуды и фазы колебаний всех входящих в систему маятников однозначно связаны между собой.

Рассмотрим некоторые соотношения, полученные при анализе системы из двух связанных маятников.

- Число парциальных частот равно числу степеней свободы в рассматриваемой системе.

- Парциальные частоты ω_{01} и ω_{02} лежат между нормальными частотами ω_1 и ω_2.
- Характер взаимодействия маятников определяется подкоренным выражением в (7),(8), то есть величиной отношения $\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^2}$, которая называется связанностью.

В случае малой связанности нормальное колебание с частотой ω_1 характеризуется возбуждением прежде всего парциальной системы с частотой ω_{01}. Другое нормальное колебание характеризуется преимущественным возбуждением второй парциальной системы.

В предельном случае сильной связанности, когда $\omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0$ $k_1=-k_2$

и

$$\omega_1^2=\omega_0^2+\sqrt{\lambda_1\lambda_2},\quad \omega_2^2=\omega_0^2-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}.$$

При этом энергия каждого нормального колебания равномерно распределена между парциальными системами, т.е. маятники колеблются с близкими амплитудами.

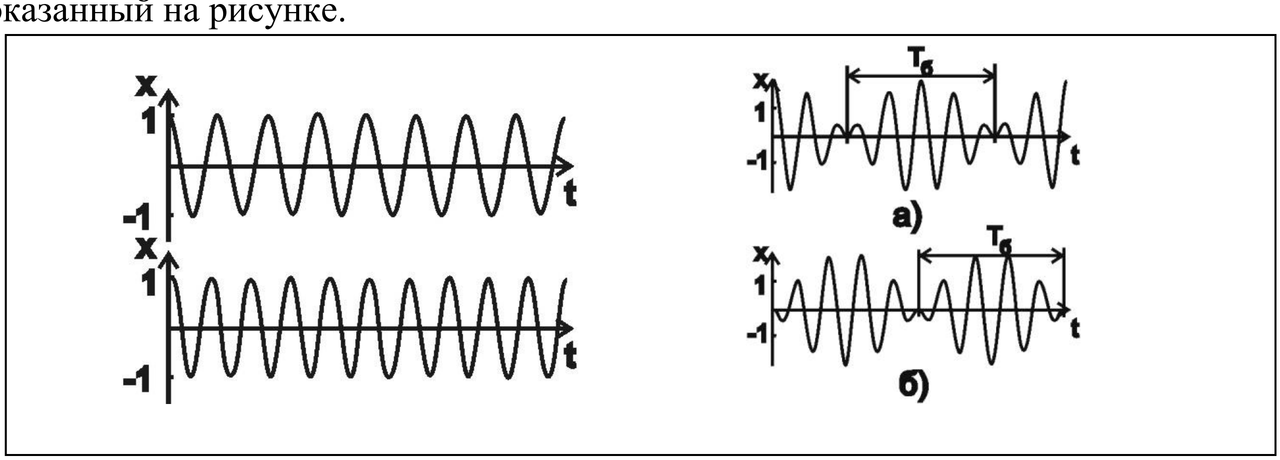
П.7.4.3.Биения в связанных системах.

В общем случае колебания в связанных системах носят сложный характер, так как возбуждаются сразу все нормальные колебания. Рассмотрим особенности колебаний в системе с двумя степенями свободы, когда возбуждаются оба нормальных колебания с одинаковыми амплитудами и близкими частотами.

Для колебания отдельного маятника можно записать

$$x=x_1+x_2=x_{01}\cos(\omega_1 t+\varphi_{01})+x_{02}\cos(\omega_2 t+\varphi_{02})$$

Если амплитуды колебаний одинаковы, то колебания имеют вид биений, показанный на рисунке.



7.5. Нелинейные колебания.

В общем случае возвращающая сила в системе не пропорциональна смещению, и уравнение движения осциллятора, в отличие от (1), сводится к виду

$$mx'' + f(x) = 0 \qquad (9)$$

здесь *f(x)* - нелинейная функция своего аргумента, которую можно представить в виде полинома

$$f(x) = f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + \ldots$$

с постоянными коэффициентами $f_1, f_2, f_3, \ldots$

Рассмотрим качественно влияние каждого члена разложения на особенности колебаний в системе.

Наличие в разложении только первого члена $f_1 x$ приводит к линейному уравнению колебаний. Его решением являются гармонические колебания.

Наличие в разложении второго члена соответствует силе, действующей на груз, которая не меняет знак в процессе движения маятника. Такая сила приводит к смещению маятника в процессе колебаний от положения равновесия в одну сторону, знак смещения зависит от знака f_2. В реальных физических ситуациях чаще всего колебания симметричны относительно положения равновесия и этот член в разложении отсутствует. Кубический член в разложении обеспечивает изменение знака силы при положительных и отрицательных смещениях маятника от положения равновесия. Когда оба коэффициента f_1 и f_3 положительны, суммарная возвращающая сила при заданном смещении больше, чем в линейном случае. Пружину, соответствующую такой возвращающей силе обычно называют жесткой, в противном случае ($f_3 < 0$) пружина называется мягкой.

В качестве примера нелинейных колебаний рассмотрим колебания математического маятника. Уравнение вращательного движения математического маятника в отсутствие затухания имеет вид

$$ml^2 \cdot \ddot{\psi} = -mg(l \cdot \sin\psi) \qquad (10)$$

или

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2 \cdot \sin\psi = 0, \qquad (11)$$

где

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

При $\psi < \frac{\pi}{12}$, $\sin\psi \approx \psi$ и колебания маятника можно считать гармоническими. В том случае, когда амплитуда колебаний маятника $\varphi_0 \geq \frac{\pi}{12}$

возвращающая сила не является линейной функцией отклонения. Такие колебания не являются гармоническими и соответствуют случаю с мягкой пружиной, поскольку

$$\sin\psi \approx \psi - \frac{1}{6}\psi^{3}. \qquad (12)$$

Можно показать, что период этих колебаний зависит от амплитуды. В первом приближении он равен

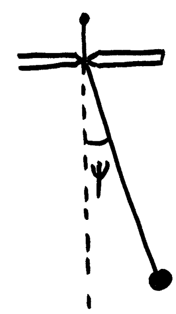
$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin\frac{\psi_0}{2}\right). \qquad (13)$$

Выражение для частоты колебаний получаем из (13) и (12)

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{16}\psi_0^2\right) \qquad (14)$$

Зависимость периода свободных колебаний от их амплитуды наблюдается и для других нелинейных систем. Однако в зависимости от характера возвращающей силы этот период может как возрастать, так и уменьшаться.

7.6. Параметрические колебания.



Мы рассмотрели два вида колебаний - свободные колебания и вынужденные. Существует, однако, еще один вид воздействия на колебательные системы. Он заключается в том, что внешняя периодическая сила изменяет один из параметров системы. Такой вид воздействия называется параметрическим. В общем случае уравнение параметрических колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + \psi_1(t)\dot{x} + \psi_2(t)x = 0 \qquad (15)$$

Наличие нелинейности в случае параметрических колебаний так же, как и для обычных вынужденных колебаний приводит к неизохронности колебаний (зависимости периода колебаний от их амплитуды) и к ограничению амплитуды параметрически возбужденных колебаний.

Определим амплитуду параметрических колебаний для математического маятника.

$$2(A^{+} + A^{-}) + A_{mp} = 0$$

$$\psi = \psi_0 \cos\omega t$$

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{16}\psi_0^2\right)$$

$$A^{+} = \left(mg + \frac{mv^2}{l} \right) \cdot \Delta l = \left(mg + m\psi_0^2 \omega^2 l \right) \cdot \Delta l = \left(mg + m\psi_0^2 \omega_0{}^2 l \left(1 - \frac{\psi_0^2}{8} \right) \right) \cdot \Delta l =$$

$$mg \left(1 + \psi_0^2 - \frac{\psi_0^4}{8} \right) \cdot \Delta l$$

$$A^{-} = -mg \cos\psi_0 = -mg \left(1 - \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\psi_0^4}{24} \right) \cdot \Delta l$$

$$A_{mp} = \int_0^T F_{mp} v dt = -\int_0^T hv^2 dt = -h(\psi_0 l\omega)^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \cdot dt =$$

$$-\frac{1}{2} h(\psi_0 l\omega)^2 T = -h\psi_0^2 l^2 \frac{2\pi}{2} \omega$$

$$\frac{h}{m} = 2\delta$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Получаем амплитуду параметрических колебаний

$$\psi_0 = 3 \sqrt{1 - \frac{\pi}{3Q \cdot \Delta l/l} \left(\frac{7}{16} \right)} \qquad (16)$$

$\Delta l/l$ - глубина модуляции.

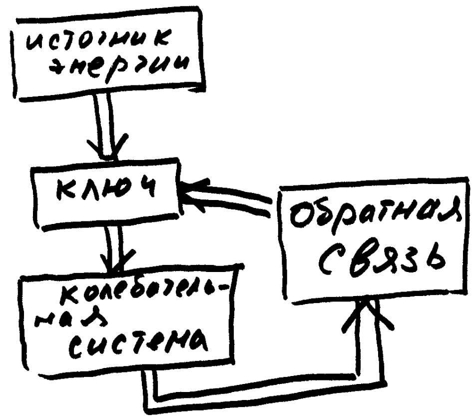
Вынужденные параметрические колебания обладают следующими свойствами

1) возбуждение происходит на частоте внешнего воздействия $\frac{2\omega_0}{n}$
2) Существует пороговое значение модуляции (см. (16)), выше которого амплитуда колебаний становится отличной от нуля.
3) параметрические колебания возбуждаются не в широкой области частот, а лишь на частотах вблизи значений $\frac{2\omega_0}{n}$
4) в отличие от линейных вынужденных колебаний, при стремлении затухания системы к нулю, амплитуда колебаний стремится не к бесконечности, а к конечному значению (см.(16))

П.7.7. Автоколебания.

Системы, в которых возникают периодические колебания в отсутствие заданного периодического воздействия называются автоколебательными системами, а сам процесс – автоколебаниями.

Примеры: Дрожание листьев на деревьях при воздействии ветра, звучание струны под действием смычка, часовой механизм. Скрип отворяемой двери – пример негармонических колебаний. Общим для таких систем является наличие *источника энергии*, *ключа*- устройства включающего и отключающего подачу энергии в *колебательную систему*. Работа ключа и период колебаний определяется *обратной связью*.



Примером автоколебаний также может служить разрушение в 1940 году подвесного моста через реку Такома в США под действием дувшего вдоль реки ветра.