

Глава 8. Волны

Волна - изменения некоторой совокупности физических величин (полей), способные перемещаться (распространяться), удаляясь от места возникновения или колебаться в ограниченной области пространства (физическая энциклопедия, "волны").

П.8.1. Распространение импульса в среде. Волновое уравнение.

П.8.1.1. Распространение импульса в среде. Бегущие волны. Волновое уравнение.

Обычно выделяют элементарные виды волн, которые являются универсальными – то есть их можно рассматривать с общих позиций, независимо от их природы.

Стационарные волны – такие волны, профиль которых перемещается без искажений.

То есть они могут быть описаны одной волновой функцией.

$$u(x, t) = u(x - vt), \quad (1)$$

то есть значение этой функции остается неизменным при

$$\xi = x - vt = \text{const}. \quad (2)$$

Величина v является **скоростью волны**

Условие постоянства функции u при $\xi = \text{const}$ можно записать в следующем виде

$$du|_{\xi=\text{const}} = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt = 0 \quad (3)$$

При $\frac{dx}{dt} = v$ получаем простейшее уравнение волны

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Обычно среда допускает распространение волн как в прямом, так и в обратном направлениях. В этом случае выполняется следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, - \quad (5)$$

его называют волновым уравнением.

Легко убедиться, что решением этого уравнения являются произвольные функции вида

$$u_1(t - \frac{x}{v}), u_2(t + \frac{x}{v})$$

или суперпозиция этих функций.

Бегущая гармоническая волна.

Частный случай стационарных волн – гармонические волны

$$u(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (6)$$

A - **амплитуда**, $\Phi = \omega t - kx + \varphi_0$ - фаза волны, ω - **угловая (циклическая) частота**, φ_0 - **начальная фаза**.

В случае распространения в произвольном направлении можно записать

$$u(\vec{r}, t) = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \quad (7)$$

функция $u(\vec{r}, t)$ периодична как во времени ($T = \frac{2\pi}{\omega}$ - **период**), так и в

пространстве ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$ - **длина волны**)

Волновой фронт – поверхность постоянной фазы. Для плоской волны – это плоскости, перпендикулярные вектору $\vec{k}$, движущиеся вдоль $\vec{k}$ с **фазовой скоростью** v_ϕ .

П.8.1.2. Волны на струне.

В отличие от уже рассмотренных систем, для описания произвольных движений в распределенных системах, вообще говоря, необходимо использовать бесконечное число параметров, то есть такие системы обладают бесконечным числом степеней свободы.

Любое возмущение, возникающее в среде, передается соседним частицам, что приводит к возникновению волнового процесса.

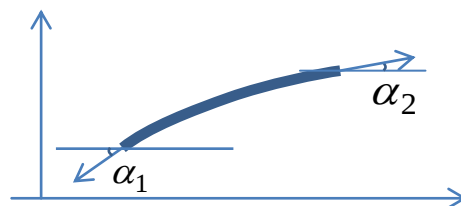


Рис.1

В качестве примера рассмотрим волны в струне, натянутой между двумя неподвижными зажимами. Колебания струны полностью

описывается одной функцией: $u_y(x, t) \equiv u(x, t)$, характеризующей вертикальные отклонения струны.

Предположим, что струна является идеальной - упругой и достаточно тонкой, а амплитуда колебаний каждой точки струны мала, так, что $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$. Будем считать также, что натяжение струны T во всех точках одинаково. На некоторой участок струны длиной δl действуют силы упругости со стороны соседних участков (рис.1) уравнение движения выделенного участка имеет вид

$$\delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))$$

где $u(x, t)$ - смещение точек струны от положения равновесия, δm - масса выделенного участка струны. Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, а отношение $\frac{\delta m}{\delta l}$ является погонной плотностью струны ρ , получаем для малых отклонений ($\cos \approx 1$)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2},$$

где скорость волны равна

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (8)$$

П.8.1.3 Продольные волны в стержне.

Рассмотрим распространение продольных деформаций в упругом стержне. Пусть в положении равновесия некоторая частица имела координату x_1 , а близкая к ней точка $x_2 = x_1 + l$, тогда после деформации координаты точек будут $x_1 + u(x_1)$ и $x_1 + l + u(x_1 + l)$

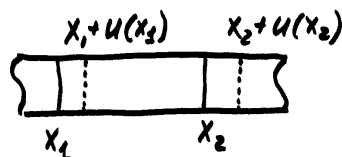


Рис.2

Расстояние между этими точками составит

$$(x_1 + l + u(x_1 + l)) - (x + u(x_1)) = l + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot l \equiv l + \Delta l$$

Относительная деформация этого элемента стержня равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

В соответствии с законом Гука для напряжения в стержне можно записать

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

где E - модуль Юнга.

Напряжения в стержне зависят от координаты x , и уравнение движения выделенного элемента объема имеет вид

$$\rho S l \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\sigma(x + l) - \sigma(x))S = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot S l,$$

где S -площадь поперечного сечения стержня.

Окончательно получаем

$$\rho S l \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot E S l$$

Отсюда получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где скорость распространения импульса равна

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

П.8.1.4. Волны в жидкости и газе

В жидкости и газе, так же, как и в упругом теле, могут распространяться волны. Их распространение описывается волновым уравнением, его вывод подобен тому, как это было сделано для волн в упругом стержне.

Движение жидкости или газа определяется величиной избыточного давления, действующего на выделенный малый элемент среды с разных сторон. Будем считать, что избыточное давление мало по сравнению с величиной p_0 . Для величины избыточного давления можно записать соотношение, аналогичное закону Гука для твердых тел. В частности, для выделенного объема можно записать

$$\Delta p = \frac{dp}{dV} \Delta V = \frac{dp}{dV} V \frac{\Delta V}{V} = -E \frac{\Delta l}{l}$$

здесь модуль упругости E равен

$$E = -\frac{dp}{dV} V$$

Вместо объема выделенного элемента тела удобнее воспользоваться его плотностью. Так как масса выделенного объема остается постоянной, то $\rho V = \text{const}$, отсюда следует, что

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta \rho}{\rho},$$

то есть

$$\Delta p = E \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Используя ранее полученное выражение для скорости звука в упругой среде (9), получаем:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (10)$$

Подкоренное выражение определяется для определенных значений p_0, ρ_0 .

В частности, для газа предположим, что распространение волны соответствует адиабатическому процессу, то есть

$$p V^{\frac{c_p}{c_v}} = \text{const}.$$

Перейдем, как и ранее, к переменным p и ρ :

$$p \cdot \rho^{-\frac{c_p}{c_v}} = \text{const} = p_0 \cdot (\rho_0)^{-\frac{c_p}{c_v}}.$$

Отсюда получаем выражения

$$dp = \frac{c_p}{c_v} \cdot p_0 \left(\frac{1}{\rho_0} \right)^{\frac{c_p}{c_v}} \rho^{\frac{c_p}{c_v}-1} d\rho$$

или

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{p_0}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{c_p}{c_v}},$$

учитывая, что $\rho \approx \rho_0$, получаем выражение для скорости волн, распространяющихся в газе

$$v = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (11)$$

П.8.1.5. Волны смещений, скоростей, деформаций, напряжений.

$$u = u_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad (12)$$

- волна смещений

$$v_u = \frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = u_0 \omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}) - \quad (13)$$

- волна скоростей (скоростей частиц)

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = u_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \quad (14)$$

- волна деформаций

$$\sigma = E\varepsilon = Eu_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = Eu_0 k \sin(\omega t - kx + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \quad (15)$$

- волна напряжений

П.8.2. Поток энергии в бегущей волне. Вектор Умова. Интенсивность волны.

Пусть в упругой среде распространяется незатухающая плоская гармоническая волна. Найдем плотность полной энергии колебаний w , переносимой этой волной.

Мгновенное значение плотности энергии складывается из потенциальной и кинетической энергии единичного объема. То есть

$$w = w_{кин} + w_{пот} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (16)$$

Пусть за единицу времени через единичную площадку поперечного сечения стержня за единицу времени проходит энергия S . Эту величину называют плотностью потока энергии.

Рассмотрим элемент объема стержня, заключенный между координатами x и $x+dx$.

Закон сохранения энергии в объеме $dV = sdx$ в этом случае можно записать в виде

$$sS(x,t) - sS(x+dx,t) = -s \frac{\partial S}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial t} s dx,$$

то есть

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Воспользуемся волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и выражением (16) для полной энергии в единичном объеме, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) = \\ &= \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\} = \rho v^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right\} = \\ &= \rho v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Следовательно

$$S = -\rho v^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (18)$$

Рассмотрим частный случай гармонической волны, распространяющейся вдоль оси x . Пусть $u = u_0 \cos(\omega t - kx)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u_0 \omega \sin(\omega t - kx) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= u_0 k \sin(\omega t - kx) \end{aligned} \quad (19)$$

и плотность энергии

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) + \frac{1}{2} E u_0^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx) = \\ &= \frac{1}{2} u_0^2 [\rho_0 \omega^2 + E k^2] \sin^2(\omega t - kx) \end{aligned}$$

Так как скорость волны равна $v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$, то $\rho_0 \omega^2 = E \frac{\omega^2}{v^2}$ и

выражение для плотности энергии принимает вид

$$w = u_0^2 \rho_0 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} w_0 (1 - \cos(2(\omega t - kx))), \quad (20)$$

Для среднего значения плотности энергии получаем

$$\langle w \rangle = \left\langle \frac{1}{2} w_0 (1 - \cos 2(\omega t - kx)) \right\rangle = \frac{1}{2} w_0. \quad (21)$$

Для потока энергии в гармонической волне получаем

$$\begin{aligned} S &= -\rho v^2 \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \\ &= -\rho v^2 (-u_0 \omega \sin(\omega t - kx)) \cdot (u_0 k \sin(\omega t - kx)) = \\ &= \rho v^2 u_0^2 \omega k \sin^2(\omega t - kx) = \rho v \omega^2 u_0^2 \sin^2(\omega t - kx) = wv \end{aligned} \quad (22)$$

Профессором Умовым в 1874 г. было введено понятие вектора плотности потока энергии (вектор Умова)

$$\vec{S} = w\vec{v} \quad (23)$$

Поток энергии через произвольную площадку $d\vec{S}$, нормаль к которой составляет угол α с направлением распространения волны, может быть выражен как

$$d\Phi = \vec{S} \cdot d\vec{S} = wv ds \cos \alpha \quad (24)$$

Плотность потока энергии зависит от выбранного момента времени, поэтому удобно пользоваться усредненным значением за период

$$I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} v \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot u^2 \quad (25)$$

- эта величина носит название **интенсивности** волны.

П.8.3. Отражение волн, моды колебаний.

П.8.3.1. Явления на границе раздела двух сред. Волновое сопротивление

Рассмотрим прохождение продольной упругой волны через границу раздела двух сред. Пусть первая среда характеризуется модулем Юнга E_1 и плотностью ρ_1 . Вторая среда - модулем Юнга E_2 и плотностью ρ_2 (рис.3). Запишем условия на границе раздела двух сред. Они сводятся к двум условиям.



Рис.3

Во-первых, смещения слева и справа от границы будут одинаковыми.

Во-вторых, одинаковы напряжения слева и справа от границы раздела.

В первой среде возбуждаются прямая (падающая) и обратная (отраженная) волны, смещение в зависимости от продольной координаты в первой среде равно

$$u_1(x, t) = u_{01}^+ \sin(\omega t - k_1 x) + u_{01}^- \sin(\omega t + k_1 x). \quad (26)$$

Во второй среде возбуждается только прямая (прошедшая) волна.

$$u_2(x, t) = u_{02}^+ \sin(\omega t - k_2 x) \quad (27)$$

Пусть координата границы раздела $x=0$. Тогда первое граничное условие запишется в виде.

$$u_1(0, t) = u_2(0, t),$$

$$u_{01}^+ \sin(\omega t - k_1 \cdot 0) + u_{01}^- \sin(\omega t + k_1 \cdot 0) =$$

$$u_{02}^+ \sin(\omega t - k_2 \cdot 0)$$

То есть

$$u_{01}^+ + u_{01}^- = u_{02}^+ . \quad (28)$$

Второе условие

$$\sigma_1(0, t) = \sigma_2(0, t) \quad (29)$$

$$E_1 \varepsilon_1(0, t) = E_2 \varepsilon_2(0, t)$$

так как $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\partial u}{\partial x}$, то

$$(-u_{01}^+ + u_{01}^-)E_1 k_1 = -u_{02}^+ E_2 k_2 \quad (30)$$

Введем в рассмотрение величину

$$Z = \frac{\sigma_0}{v_{\varphi 0}} = \frac{E}{v} = \rho v \quad (31)$$

Эта величина носит название **волнового сопротивления**.
Окончательно получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{01}^{+} + u_{01}^{-} &= u_{02}^{+} \\ (-u_{01}^{+} + u_{01}^{-})Z_1 &= -u_{02}^{+}Z_2 \end{aligned} \quad (32)$$

Решая полученную систему уравнений, находим выражения для амплитуд отраженной и прошедшей волн

$$\begin{aligned} u_{01}^{-} &= \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} u_{01}^{+}, \\ u_{02}^{+} &= \frac{2}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} u_{01}^{+} \end{aligned} \quad (33)$$

Величина

$$\Gamma = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} \quad (34)$$

называется **коэффициентом отражения**.

В частности, если

- 1) $Z_1 = Z_2$, отражения на границе раздела сред отсутствуют;
- 2) $Z_1 \ll Z_2$ (можно считать, что на границе раздела левая часть стержня жестко закреплена), $u_{01}^{-} = -u_{01}^{+}$, $u_{02}^{+} = 0$, то есть происходит полное отражение падающей волны с изменением фазы на π ;
- 3) $Z_1 \gg Z_2$ этот случай соответствует тому, что граница является свободной (вторая среда отсутствует). Из (29) и (31) следует, что в этом случае $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$. Для отраженной волны

получаем $u_{01}^- = u_{01}^+$ - отражение происходит без изменения фазы волны.

П.8.3.2. Стоячие волны, моды колебаний

Рассмотрим особенности распространения волн в струне, закрепленной на левом и правом концах. Предположим, что одна из точек струны (с координатой $x = x_0$) под действием внешней силы совершает колебания по гармоническому закону. То есть, будут выполнены следующие условия

$$u(x_0, t) = u_{00} \cos \omega t, \quad (35)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (36)$$

$$u(L, t) = 0, \quad (37)$$

ω - циклическая частота внешней силы.

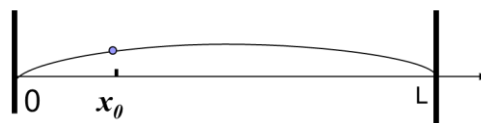


Рис.4

Возмущение от колеблющейся точки закрепления будет распространяться по струне в обе стороны со скоростью v . При определенных условиях, которые мы далее определим, через некоторое время в струне установятся две бегущие во встречных направлениях волны. В соответствии с п.8.3.1. отражение на левом закрепленном конце ($x=0$) происходит в противофазе, то есть

$$u^+(x, t) = u_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \theta)$$

и

$$u^-(x, t) = -u_0 \cos(\omega t + \frac{\omega}{v}x + \theta).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u^+(x, t) + u^-(x, t) = \\ &= u_0 \cos(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \theta) + u_0 \cos(\omega t + \frac{\omega}{v}x + \theta) = -2u_0 \sin(\omega t + \theta) \cdot \sin(\frac{\omega}{v}x) \end{aligned} \quad (38)$$

Граничное условие на правом закрепленном конце струны ($x = L$) имеет вид

$$u(L, t) = -2u_0 \sin(\frac{\omega}{v}L) \sin(\omega t + \theta) = 0. \quad (39)$$

Так как это условие должно выполняться в любой момент времени, то

$$\frac{\omega}{v} L = \pi k, \quad (40)$$

где $k = 1, 2, \dots$.

Определим амплитуду u_0 . Для этого воспользуемся условием (35) и (38):

$$u(x_0, t) = -2u_0 \sin\left(\frac{\omega}{v} x_0\right) \cdot \sin(\omega t + \theta) = u_{00} \cos \omega t$$

Отсюда следует, что $\theta = \frac{\pi}{2}$, а амплитуда равна

$$u_0 = \frac{u_{00}}{2 \sin\left(\frac{\omega}{v} x_0\right)}. \quad (41)$$

При значениях x_0 , удовлетворяющих выражению $\frac{\omega}{v} x_0 = \pi n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, это отношение будет стремиться к бесконечности. Реально из-за потерь амплитуда колебаний, конечно, не будет бесконечно большой. При выполнении условия (40) каждая точка струны будет совершать движение по закону

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) = 2u_0 \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \cos(\omega t). \quad (42)$$

Такое движение является колебательным с амплитудой

$$u(x) = 2u_0 \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right). \quad (43)$$

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю, называются узлами, а там, где амплитуда достигает максимальных значений, называются пучностями.

В общем случае в гибкой однородной струне, натянутой между двумя точками могут наблюдаться колебания различного вида. Наибольший интерес представляет рассмотренный нами случай, когда все точки струны совершают гармонические колебания. Такие собственные колебания струны называются нормальными колебаниями или модами. Любое колебание струны может быть однозначно представлено как суперпозиция (сумма) нормальных колебаний (мод) с определенными частотами. При возбуждении нормальных колебаний (мод) вдоль струны устанавливаются стоячие волны, причем на концах струны в соответствии с (36), (37) всегда имеем узел смещения, а вдоль струны укладывается целое число длин стоячих волн.

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (44)$$

где $n=1, 2, 3, \dots$, λ_n - длина бегущей волны. Так как длина волны связана со скоростью ее распространения v и частотой ν соотношением $\lambda \nu = v$, то в струне устойчивые колебания могут наблюдаться на частотах

$$\nu_n = \frac{v}{2L} n. \quad (45)$$

П.8.4. Элементы акустики.

Акустика- область физики, в которой исследуются упругие колебания и волны от самых низких частот (< 1 Гц) до предельно высоких (10^{12} - 10^{13} Гц)

П.8.4.1. Звук и его характеристики.

$$I = \frac{1}{2} \nu \rho_0 \omega^2 u_0^2$$

$$\delta p = -E \varepsilon,$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}},$$

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -k u_0 \cos(\omega t - kx)$$

Следовательно, для амплитуды давления в звуковой волне можно записать $\delta p_0 = \nu \rho_0 \omega u_0$, тогда выражение для интенсивности принимает вид

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta p_0^2}{\rho v} \quad (46)$$

Пример.

1. Порог болевого ощущения.

$$\delta p_0 = 300 \text{ Па}$$

$$u_0 = \frac{\delta p_0}{\nu \rho \omega} = \frac{300}{330 \cdot 1.3 \cdot 6.28 \cdot (1 \cdot 10^3)} \approx 10^{-4} \text{ м} = 0.01 \text{ см}$$

2. Предел слышимости.

$$\delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$$

Отсюда

$$u_0 = 0.8 \cdot 10^{-9} \text{ см}$$

Ощущение звука связано с воздействием механических колебаний упругой среды на слуховой аппарат человека. Ухо человека воспринимает колебания в пределах 20 Гц-20000 Гц. Область частот ниже слышимых частот - инфразвук, область частот выше слышимых частот – ультразвук. Источником звука может быть любое тело, совершающее механические колебания в окружающей среде, например, колеблющаяся струна, мембрана, свисток. Звуки различают по **высоте, тембру и громкости**.

П.8.4.2. Закон Вебера -Фехнера.

Для того, чтобы вызвать звуковое ощущение, волна должна иметь интенсивность, превышающую минимальную, или пороговую $I_{пор}$, зависящую от частоты.

Громкость звука определяется величиной

$$\beta = \lg \frac{I}{I_{пор}} \quad (47)$$

и измеряется в фонах. Этот закон (47) носит название **закона Вебера-Фехнера**: чувствительность уха человека к звуку меняется как логарифм интенсивности звука. На рисунке показаны кривые, соответствующие постоянным значениям уровней громкости. Верхняя кривая практически соответствует порогу болевого ощущения. Уровни громкости различных звуков примерно таковы: шум в вагоне метро - 90-95 фон, громкий разговор на расстоянии 0.5 м - приблизительно 30 фон, шепот – около 10 фон.

Громкость звука является субъективным критерием, поэтому в акустике пользуются также объективной единицей – уровнем звукового давления

$$L_p = \lg \frac{I}{I_{пор}} = 2 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{пор}}$$

В этом определении принято использовать стандартный порог слышимости $\delta p_{пор} = 2 \cdot 10^{-5}$ Па (ему соответствует значение пороговой интенсивности $I_{пор} = 10^{-12}$ Вт/м² – это пороговая чувствительность человеческого уха на частоте 1 кГц).

На рис. 5 показана диаграмма звука. На ней для различных громкостей от 0 до 120 фон отражены зависимости от частоты интенсивности звука и звукового давления.

Уровень звукового давления обычно измеряют в децибелах

$$L_p = 10 \lg \frac{I}{I_{\text{нор}}} = 20 \lg \frac{\delta p}{\delta p_{\text{нор}}} \quad (48)$$

Наиболее чувствительно ухо к волнам с частотами около 3 кГц. В этом диапазоне интенсивность слышимых звуковых колебаний может отличаться в 10^{12} раз.

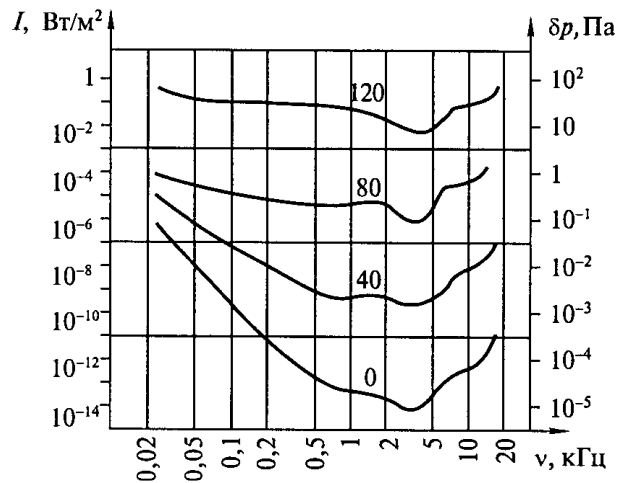


Рис.5

П.8.4.3.Эффект Доплера.

Эффект Доплера состоит в следующем. Если источник или приемник движутся относительно среды, в которой распространяются звуковые колебания, то частота, воспринимаемая приемником, будет отличаться от частоты источника.

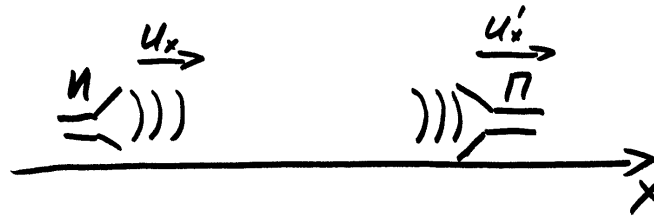


рис.6

1) **Источник и приемник покоятся.** Пусть в течение времени t_n источник испустил n импульсов. В пространстве длина этого цуга импульсов равна $L_1 = t_n v$, частота равна

$$\nu = \frac{n}{t_n}.$$

Приемник принимает эти импульсы также в течение времени $t'_n = t_n$, и частота принимаемого сигнала равна частоте испускаемого.

$$\nu = \frac{n}{t_n}$$

2) **Источник движется со скоростью u , приемник покоится.** Пусть в течение времени t_n источник испустил n импульсов, частота равна

$$\nu = \frac{n}{t_n}.$$

В пространстве длина этого цуга равна $L = t_n(v - u)$. Приемник принимает эти импульсы в течение времени $t'_n = \frac{L}{v}$, и частота принимаемого сигнала равна.

$$\nu' = \frac{n}{t'_n} = \frac{nv}{L} = \frac{nv}{t_n(v - u)} = \nu \frac{v}{(v - u)}$$

3) **Источник движется со скоростью u , приемник движется со скоростью u' .** Пусть в течение времени t_n источник испустил n импульсов, частота равна $\nu = \frac{n}{t_n}$. В пространстве длина этого цуга равна $L = t_n(v - u)$. Приемник принимает эти импульсы в течение времени $t'_n = \frac{L}{v - u'}$ и частота принимаемого сигнала равна

$$\nu' = \frac{n}{t'_n} = \frac{n(v + u')}{L} = \frac{nv}{t_n(v - u)} = \nu \frac{(v - u')}{(v - u)} \quad (49)$$

здесь u_x и u'_x – проекции скоростей источника и приемника на ось x (см. рис. 6)

П.8.4.4. Акустические резонаторы.

1) Рассмотрим колебания в резонаторе, представляющем собой закрытую с двух сторон трубу.

На рис. 7 для трех моментов времени в пределах одного периода показаны: а) смещение частиц, б) профиль плотности, в) изменение давления, г) изменение скорости.

Нормальные колебания, возбуждаемые в закрытой трубе подобны нормальным модам струны, вдоль трубы укладывается целое

число полуволн. На концах трубы всегда наблюдается узел смещения, что соответствует граничному условию типа $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

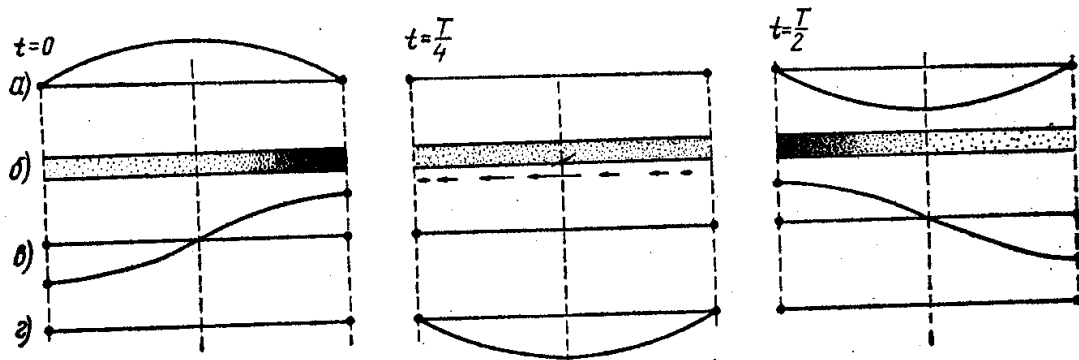


рис.7

2) Если колебаний происходят в трубе, открытой с одного конца. То для определения нормальных колебаний на правом (открытом) конце следует использовать граничное условие, заключающееся в непрерывности смещения внутри и вне трубы:

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0.$$

На открытом конце трубы всегда будет наблюдаться пучность смещения, поэтому на длине такого резонатора будет укладываться нечетное число четвертей длин волн. Собственные частоты нормальных колебаний в таком резонаторе относятся как 1,3,5,7...

Другим типом резонатора может служить **резонатор Гельмгольца**. Принципиальная схема его показана на рис.8. Газ, сосредоточенный в объеме V является упругим элементом, а газ, в горлышке резонатора длиной l и площадью S является колеблющейся массой, таким образом, частота колебаний такой колебательной системы определяется так же, как для обычного пружинного маятника.

Поскольку $\frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{S \cdot \xi}{V}$, где $\delta \rho$ - изменение плотности воздуха в объеме

V (ξ - смещение колеблющейся массы воздуха в горлышке резонатора), то избыточное давление, действующее на колеблющуюся массу, равно

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho} \delta \rho = v^2 \delta \rho$$

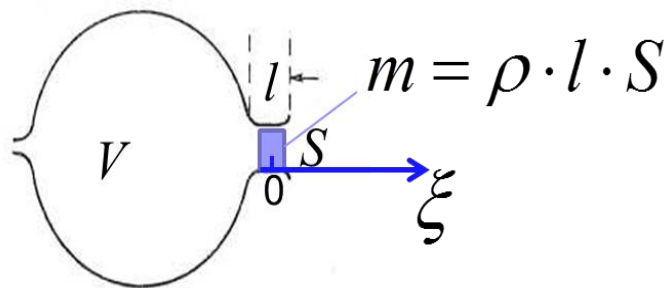


Рис.8

Следовательно, уравнение движения колеблющейся массы воздуха имеет вид

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \delta p \cdot S$$

То есть происходят колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{v^2 \delta \rho S}{m}} = \sqrt{\frac{v^2 S}{V l}}.$$

Для таких резонаторов длина возбуждающей волны может значительно превышать характерные размеры резонатора.

П.8.5. Ударные волны.

См. собственный конспект.