

## Глава 9. Основы гидро и аэромеханики

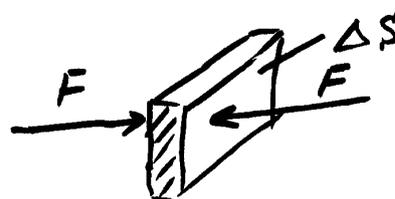
### П.9.1. Основы гидро- и аэростатики.

#### П.9.1.1. Закон Паскаля.

Всякий объем жидкости или газа может изменить свою форму под действием сколь угодно малой силы. В жидкостях и газообразных веществах отсутствуют касательные напряжения.

Если жидкость неравновесна (в ней происходит движение отдельных слоев друг относительно друга), то касательные напряжения в такой жидкости существуют – они связаны с вязким трением слоев друг относительно друга. Если пренебречь вязкостью, то такую жидкость (или газ) называют идеальной жидкостью (или газом).

Другая особенность жидкостей и газов – отсутствие в них напряжений растяжения. Напряжения в жидкости создаются только при сжатии жидкости или газа. Кроме того, для покоящейся жидкости сила напряжения всегда перпендикулярна грани выделенного объема так как касательные напряжения отсутствуют. Для каждой площадки жидкости существует только нормальное напряжение

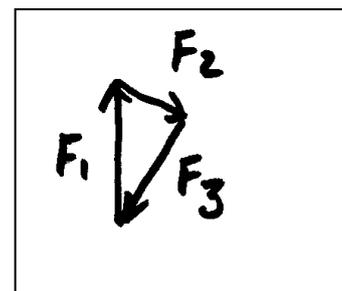
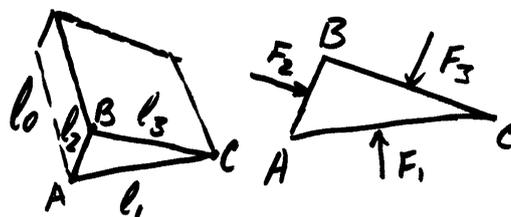


$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

которое называют давлением в жидкости или газе.

Доказательство

Выделим в жидкости длинную треугольную призму так, как показано на рисунке. Так, как элемент жидкости покоится, то сумма всех сил равна нулю. Силами, действующими на торцы пренебрегаем так как их площади можно сделать сколь угодно малыми по сравнению с боковыми. Тогда  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ . Следовательно, эти три вектора образуют треугольник, подобный  $\triangle ABC$ , так как силы перпендикулярны граням. Из подобия треугольников следует, что



$$\frac{F_1}{l_1} = \frac{F_2}{l_2} = \frac{F_3}{l_3},$$

отсюда следует, что

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{F_3}{S_3} \Rightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p.$$

Это справедливо также, когда на жидкость действуют и массовые силы. Если массу тела устремить к нулю, то массовые силы будут пропорциональны

объему, а поверхность площади, поэтому они будут убывать с уменьшением объема быстрее.

Закон Паскаля.

Пусть массовые силы отсутствуют, то есть  $\vec{f}_m = 0$ , тогда  $\nabla p = 0 \Rightarrow p = p_0 = const$ , где  $p_0$  - давление на поверхности. Внешнее давление передается жидкостью или газом по всем направлениям без изменений. Если действует массовая сила, то изменение давления на поверхности жидкости приводит к изменению на эту же величину давления во всех точках жидкости или газа.

### 9.1.2. Основное уравнение гидростатики.

Рассмотрим элементарный объем покоящейся жидкости. Здесь  $f_m \cdot \Delta V$  - массовая (объемная) сила,  $f_m$  - плотность массовой силы.

Условие равновесия объема имеет вид.

$$\vec{F}_\rho(z) + \vec{F}_\rho(z + \Delta z) + \vec{f}_m \Delta V = 0.$$

$$+ p(z) \Delta S_z \vec{n} - p(z + \Delta z) \Delta S_z \vec{n} + \vec{f}_m \Delta V = 0.$$

$$\frac{p(z + \Delta z) - p(z)}{\Delta z} \Delta z \cong \frac{dp}{dz} \Delta z$$

учитывая, что  $n_z = -1$  получаем в проекции на ось z:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \Delta z \Delta S_z + f_{mz} \Delta V = 0$$

$$\begin{cases} f_{mz} - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \\ f_{my} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_{mx} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

откуда получаем

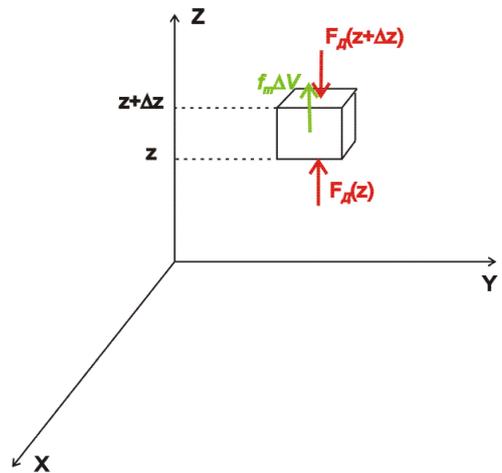
$$\vec{f}_m - \text{grad} p = 0 \quad (2)$$

### 9.1.3. Сжимаемость жидкостей и газов.

Давление в данной точке жидкости и газа зависит от степени сжатия в этой точке. Величина давления (напряжение) определяет объемное сжатие. Объемная упругость жидкости и газа количественно характеризуется коэффициентом сжимаемости:

$$\gamma = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}, \quad (3)$$

или модулем сжатия



$$K = \frac{1}{\gamma} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad (4)$$

Коэффициенты сжатия и модуль сжатия зависят от температуры, поэтому обычно их задают при фиксированном значении температуры и называют изотермическим коэффициентом и модулем всестороннего сжатия

$$\gamma = -\frac{1}{V} \left( \frac{dV}{dp} \right)_{T=const}, K = -V \left( \frac{dp}{dV} \right)_{T=const} \quad (5)$$

**Замечание 1.** Малая сжимаемость жидкостей позволяет во многих задачах рассматривать жидкость вообще несжимаемой.

**Замечание 2.** При небольших изменениях объема жидкостей в них могут возникать огромные напряжения.

#### 9.1.4. Распределение давления в покоящейся жидкости (газе) в поле сил тяжести. Барометрическая формула.

В жидкости

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = \rho g$$

$$p(z) = \rho g z + p_0 \quad (6)$$

В газе

Рассмотрим газ, состоящий из молекул одного вещества. Для него можно записать

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = \rho(z) g$$

$$\rho = n \cdot m_0, \quad p = n k T$$

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = -\frac{p}{kT} m_0 g$$

отсюда получаем

$$\frac{\partial p}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} \partial z$$

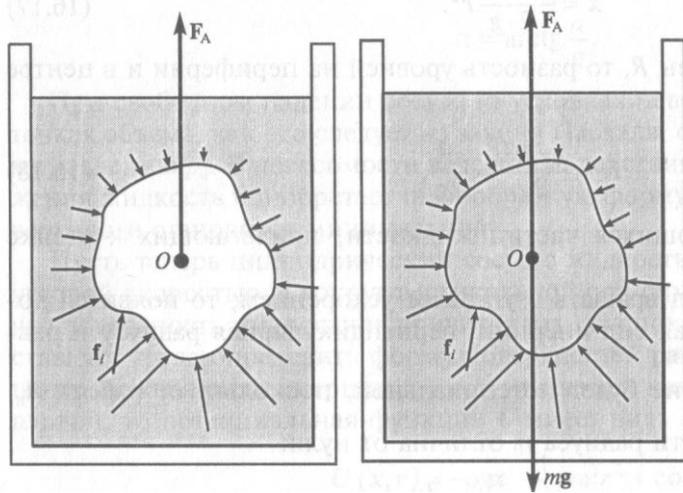
$$\ln p = -\frac{m_0 g}{kT} z + const$$

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z} + const \text{ - барометрическая формула.} \quad (7)$$

#### 9.1.5. Закон Архимеда.

Сила Архимеда – это равнодействующая всех сил давления.

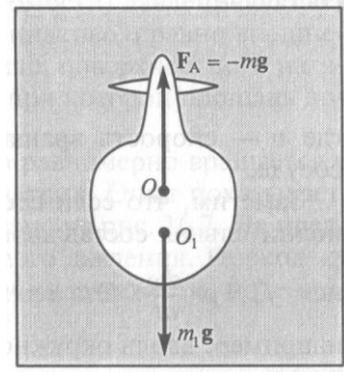
Можно ее рассчитать непосредственно, но мы найдем ее исходя из физических представлений. Если мы мысленно вынем тело и заполним эту полость жидкостью, то очевидно результирующая сил давления не изменится, так как этот объем жидкости покоится, то сила Архимеда равна весу этой жидкости:  $F_A = m_{жс} g = \rho_{жс} \cdot V \cdot g$ .



Таким образом: на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости, приложенная к центру вытесненного объема (центру тяжести вытесненной жидкости) и направленная вертикально вверх.

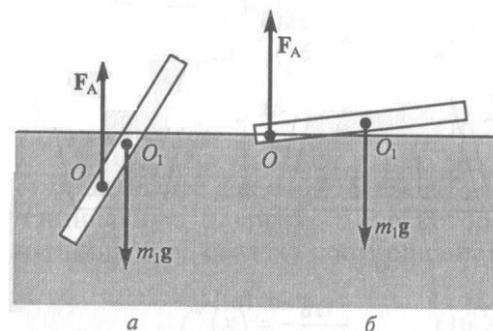
### 9.1.6. Условия устойчивого плавания тел.

Для того чтобы тело не тонуло необходимо, чтобы выталкивающая сила была равна весу тела. Однако для устойчивого плавания тел (в кораблестроении используется термин *остойчивость*) необходимо учитывать точку приложения выталкивающей силы. Рассмотрим отдельно два случая.

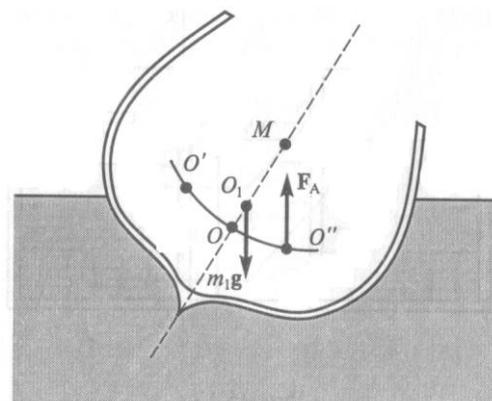


#### 1-й случай.

Пусть тело полностью погружено в жидкость (например, батискаф). Видно, что при наклонах действие моментов сил Архимеда и тяжести будет приводить к выравниванию тела по вертикали. Плавание тела будет устойчивым, так как центр масс лежит ниже центра плавучести тела.



2-й случай. Тело плавает по поверхности жидкости. Плавание тонкого стержня (см.рисунок) будет устойчивым, если он расположен горизонтально.



Для тел, плавающих в жидкости центр тяжести, как правило, расположен выше точки приложения выталкивающей силы. Для устойчивого плавания

необходимо выбирать форму днища корабля.

При наклоне тела точка приложения выталкивающей силы смещается. Точка пересечения линии действия выталкивающей силы с осью симметрии называется метацентром (М). Если метацентр лежит выше центра тяжести тела, плавание будет устойчивым, так как действие моментов сил тяжести и выталкивающей будет приводить к выравниванию судна.

## П9.2. Стационарное течение несжимаемой жидкости.

### П.9.2.1. Идеальная жидкость. Линии тока. Трубки тока.

**Идеальная жидкость** – жидкость, лишенная вязкости.

Течение жидкости – **стационарное**, если все величины ( скорость, давление, плотность, температура и т.д.) остаются неизменными в каждой точке пространства. **Линии тока** – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением скорости частицы.

**Трубка тока** – область пространства, ограниченная замкнутой поверхностью, образованной семейством трубок тока. Если сечение трубки тока достаточно мало, то можно считать, что в поперечном сечении скорости частиц одинаковы.

Для произвольной трубки тока можно записать выражение для массы жидкости, протекающей через поперечное сечение за время  $dt$

$$dm = \rho v S dt ,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $S$  - площадь поперечного сечения трубки.

В случае стационарного течения масса  $dm$  будет одной и той же для всех сечений трубки. То есть для двух произвольных сечений трубки тока выполняется соотношение

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 .$$

Если жидкость несжимаема, то ее плотность не меняется и

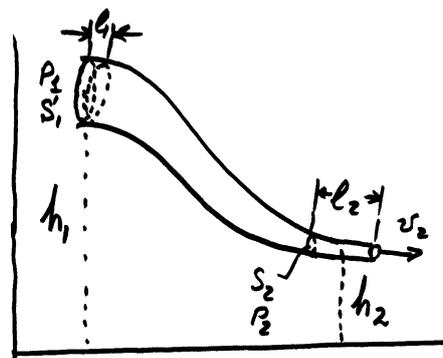
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} . \quad (8)$$

### П.9.2.2. Уравнение Бернулли

Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Выделим произвольную трубку тока. Пусть за промежуток времени  $dt$  некоторое сечение площадью  $S_1$  смещается на расстояние  $l_1$ , а сечение, площадью  $S_2$  - на расстояние  $l_2$  (см. рисунок). Поскольку жидкость несжимаема, то

$$V_2 = V_1 = S_1 l_1 = S_2 l_2 \quad (9)$$

Изменение механической энергии выделенного объема равно работе сил давления



$$E_2 - E_1 = A_{\text{дав}}, \quad (10)$$

то есть

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 - \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = p_1 S_1 l_1 - p_2 S_2 l_2 \quad (1)$$

отсюда следует, что

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 l_2 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 l_1 \quad (12)$$

Учитывая (9) получаем окончательно

$$\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 \quad (13)$$

то есть

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const} \quad (14)$$

Это уравнение называется уравнением Бернулли.

**Пример 1.** Вытекание жидкости из широкого сосуда.

Запишем уравнение Бернулли для произвольной трубки тока. Поскольку сосуд широкий, то скорость частиц в верхней части сосуда мала. Кроме того, на жидкость действует атмосферное давление, как на поверхности, так и в области отверстия. Поэтому уравнение Бернулли запишется следующим образом

$$\rho gh + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0; \quad (15)$$

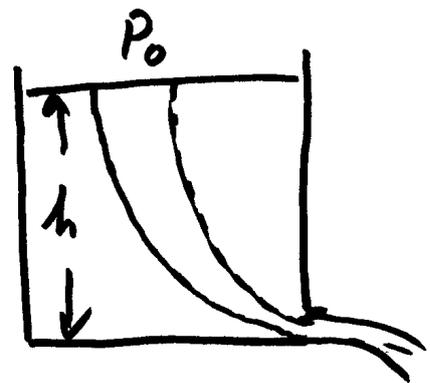
Отсюда следует

$$v = \sqrt{2gh} \quad (16)$$

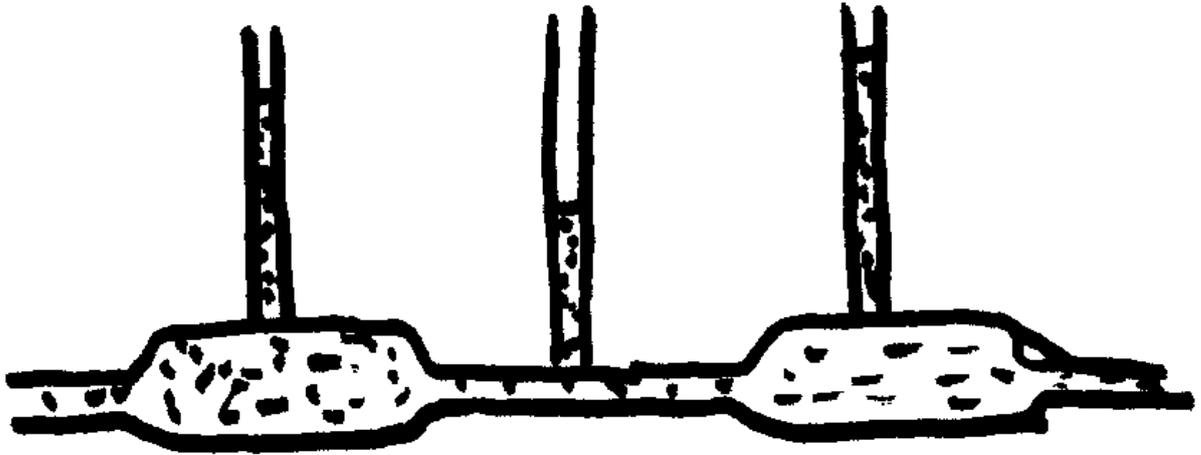
это *формула Торричелли*. Скорость жидкости, вытекающей из сосуда равна той скорости, которую получает тело, падая с той же высоты  $h$ .

**Пример 2.** Давление в жидкости, текущей по трубе переменного сечения.

В том случае, когда жидкость течет по горизонтальной трубке переменного сечения, уравнение Бернулли принимает вид



$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.} \quad (17)$$



Отсюда следует, что давление минимально на тех участках, где скорость максимальна (то есть там, где минимально сечение трубы).

Это легко проверить на демонстрации, схема которой показана на рисунке. В трубку переменного сечения вставлены вертикальные трубки. По высоте поднятия жидкости в этих трубках можно судить о давлении.

Подобного типа устройство может быть использовано для измерения расхода воды.

Из условия постоянства расхода воды в любом сечении имеем

$$Q = \rho \cdot v_1 S_1 = \rho \cdot v_2 S_2 \quad (18)$$

Учитывая (17) получаем

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)\rho}{\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}}} \quad (19)$$

### Пример 3. Трубка Пито и трубка Прандля.

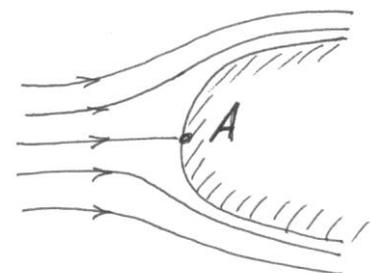
Пусть поток жидкости обтекает произвольное тело. Качественно ход линий тока показан на рисунке. В точке А скорость жидкости обращается в нуль. Уравнение Бернулли в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = p_0, \quad (20)$$

здесь  $p_0$  - максимальное давление, которое может иметь жидкость вдоль рассматриваемой трубки тока. Обычно используют следующие определения

$p$  - статическое давление (или просто давление),

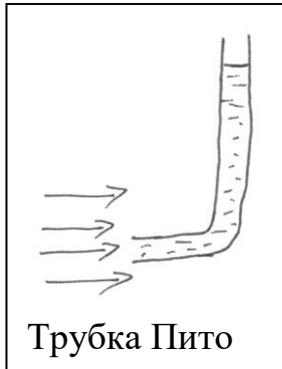
$\frac{\rho v^2}{2}$  - динамическое давление (скоростной



напор),

$$\frac{\rho v^2}{2} + p - \text{полное давление (полный напор)}.$$

Для измерения полного напора используется трубка Пито (1695-1771). Она имеет вид, показанный на рисунке



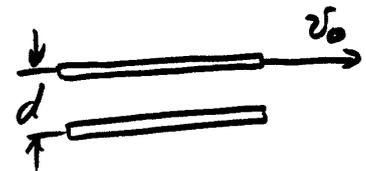
Для измерения динамического давления можно воспользоваться трубкой Прандтля (1875-1953).

**П.9.2.3. Течение вязкой жидкости. Сила вязкого трения. Формула Пуазейля.**

При движении жидкости возникают силы внутреннего трения.

Представим себе две параллельных пластинки.

Одна из них покоится, другая движется со скоростью  $v_0$  так, как показано на рисунке.



Экспериментально было установлено еще Ньютоном, что на верхнюю пластинку будет действовать сила трения, равная

$$F = \eta S \frac{v_0}{d}, \tag{21}$$

здесь  $\eta$ - постоянная, называемая коэффициентом внутреннего трения или коэффициентом вязкости жидкости. В том случае, когда обе пластинки движутся сила трения пропорциональна их относительной скорости.

В общем случае сила трения определяется градиентом скорости в направлении перпендикулярном направлению движения.

То есть

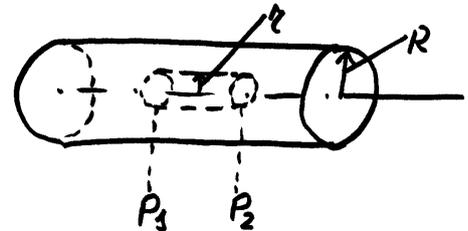
$$F = \eta S \frac{dv}{dx} \tag{22}$$

В таблице представлены значения коэффициента вязкости для некоторых жидкостей и газов.

Вещество	Коэффициент вязкости (Па·сек)		
	t=0 <sup>0</sup> C	t=15 <sup>0</sup> C	t=99 <sup>0</sup> C
Жидкости			
Глицерин	4.6	1.5	-

Вода	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$1.15 \cdot 10^{-3}$	$0.29 \cdot 10^{-3}$
Эфир	$0.29 \cdot 10^{-3}$	$0.25 \cdot 10^{-3}$	-
Газы			
Воздух	$1.71 \cdot 10^{-5}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Углекислый газ	$1.39 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-5}$	$1.86 \cdot 10^{-5}$
Водяной пар	$0.9 \cdot 10^{-5}$	$0.97 \cdot 10^{-5}$	$1.31 \cdot 10^{-5}$

Рассмотрим движение вязкой жидкости по трубе круглого сечения. Мысленно выделим расположенный вдоль оси трубы цилиндр (см.рисунок). На поверхность цилиндра снаружи действует сила вязкого трения



$$F = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} \quad (23)$$

так как скорость цилиндра постоянна, то сумма сил, действующих на него равна нулю

$$\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr} + (p_1 - p_2)\pi r^2 = 0, \quad (24)$$

отсюда

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r dr. \quad (25)$$

После интегрирования получаем

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} r^2 + C \quad (26)$$

Учитывая, что у стенок трубы скорость жидкости равна нулю, получаем выражение для C:

$$C = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2 \quad (27)$$

Окончательно

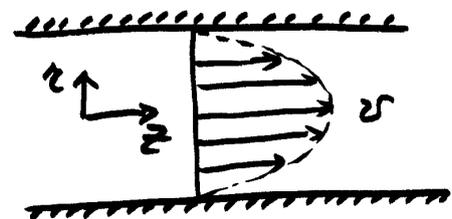
$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} (R^2 - r^2). \quad (28)$$

Качественно зависимость скорости от радиуса показана на рисунке

Определим количество жидкости, протекающей через сечение трубы.

Через каждое тонкое кольцо, толщиной  $dr$  протекает объем жидкости

$$dQ = 2\pi r dr \cdot v \quad (29)$$



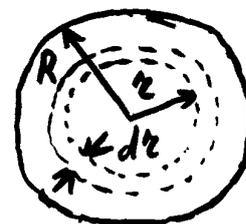
Тогда через все сечение трубы протекает

$$Q = \int_0^R 2\pi v r dr = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} \int_0^R (R_2 - r_2) 2\pi r dr \quad (30)$$

После интегрирования получаем

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{\pi R^4}{8\eta} \quad (31)$$

Эта формула носит название "*формула Пуазейля*", так как Пуазейль экспериментально исследовал течение жидкостей по трубам. С ее помощью по скорости истечения жидкости можно определять коэффициент вязкости.



### ***П. 9.3. Ламинарное и турбулентное течение. Обтекание тел жидкостью или газом.***

#### ***П.9.3.1. Ламинарное и турбулентное течение. Число Рейнольдса.***

Характер течения жидкости зависит от ее вязкости, скорости движения, геометрии системы, других характеристик. Для визуализации движения жидкости ее подкрашивают. Течение, при котором движение жидкости можно представить, как скольжение отдельных слоев друг относительно друга называют **ламинарным**. В этом случае можно использовать понятия линий тока и трубок тока.

Для частного случая течения жидкости по трубе, используя формулу Пуазейля легко показать что для средней скорости выполняется соотношение

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{R^2}{8\eta} \quad (32)$$

То есть падение давления в трубе определяется соотношением

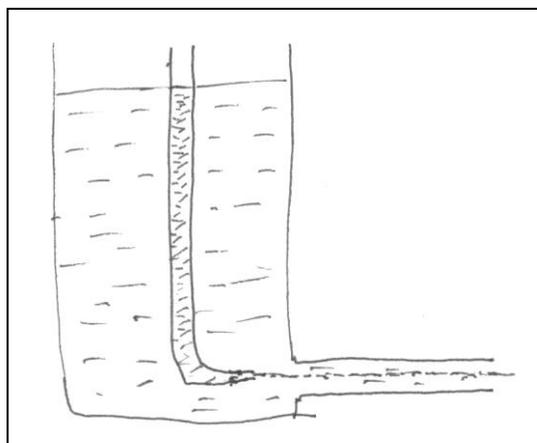
$$p_1 - p_2 = \frac{8\eta}{R} \langle v \rangle \frac{l}{R} \quad (33)$$

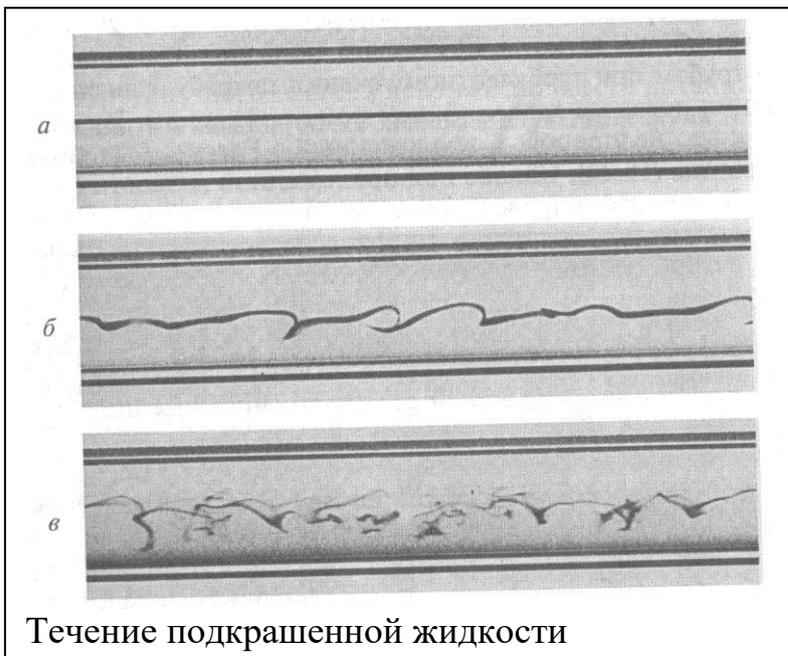
При увеличении скорости в жидкости появляются завихрения, нарушающие ламинарное течение. Такое течение называют турбулентным. При турбулентном движении падение давления в трубе резко возрастает. Оно оказывается пропорциональным уже не скорости течения жидкости, а ее квадрату.

$$p_1 - p_2 = k\rho \langle v \rangle^2 \frac{l}{R} \quad (34)$$

здесь k- безразмерный гидравлический коэффициент.

Переход от ламинарного течения к турбулентному можно наблюдать в опыте, схема которого показана на рисунке.





При малых скоростях течения наличие вязкого трения стабилизирует движение жидкости, движение является ламинарным, увеличение скорости приводит к возникновению неустойчивости, движение становится турбулентным.

Введем безразмерный параметр, определяющий соотношение между работой силы трения и кинетической энергией в потоке.

Для определения работы силы трения воспользуемся соотношением (33)

Поскольку движение стационарно, то работа силы трения при перемещении столба жидкости длиной  $l$  на расстояние  $l$  равна работе сил давления

$$A_{mp} = (p_1 - p_2) \cdot \pi R^2 \cdot l = \frac{8\eta}{R} \langle v \rangle \cdot \frac{l}{R} \cdot \pi R^2 \cdot l = 8\eta \langle v \rangle \cdot \pi l^2 \quad (35)$$

для кинетической энергии можно записать

$$E = \frac{m \langle v \rangle^2}{2} = \frac{\rho (\pi R^2 l) \langle v \rangle^2}{2} \quad (36)$$

их отношение равно

$$\frac{E}{A_{mp}} = \frac{\rho (\pi R^2 l) \langle v \rangle^2}{2 \cdot 8\eta \langle v \rangle \pi l^2} = \frac{\rho R^2 \langle v \rangle}{2 \cdot 8\eta l} \quad (37)$$

Сопоставление работы силы трения и кинетической энергии имеет смысл проводить на участке  $l$ , сопоставимом с характерным поперечным размером системы, в данном случае с радиусом. Положим  $l=R$ , тогда

$$\frac{E}{A_{mp}} = \frac{\rho R \langle v \rangle}{2 \cdot 8\eta} \quad (38)$$

Величину пропорциональную этому отношению называют числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta} \quad (39)$$

В рассмотренном опыте переход от ламинарного течения к турбулентному зависит от геометрии места соединения сосуда и выходной трубы. Область критических значений чисел Рейнольдса лежит в диапазоне между 1200 (незакругленный вход) и 20000 (плавный закругленный вход).

**Пример 1.** Оценки чисел Рейнольдса для типичных случаев.

Пусть вода течет по трубе радиуса  $R=1$  см, скорость течения  $v=1$  см/с

Число Рейнольдса равно

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta} = \frac{10^3 \cdot (1 \cdot 10^{-2}) \cdot (1 \cdot 10^{-2})}{1.15 \cdot 10^{-3}} = 87$$

Для воздуха при тех же условиях

$$Re = \frac{\rho R \langle v \rangle}{\eta} = \frac{1.3 \cdot (1 \cdot 10^{-2}) \cdot (1 \cdot 10^{-2})}{1.8 \cdot 10^{-5}} = 7.2$$

Таким образом силы вязкого трения для воздуха и других газов играют большую роль, чем при течении воды.

### П.9.3.2. Лобовое сопротивление при обтекании тел. Парадокс Даламбера.

Возникновение лобового сопротивления рассмотрим на примере обтекания тела жидкостью. Качественно картина линий тока приведена на рисунке. В отсутствие сил сопротивления линии тока симметричны

В точке А давление равно полному напору

$$\frac{\rho v^2}{2} + p.$$

В точке В токовые линии

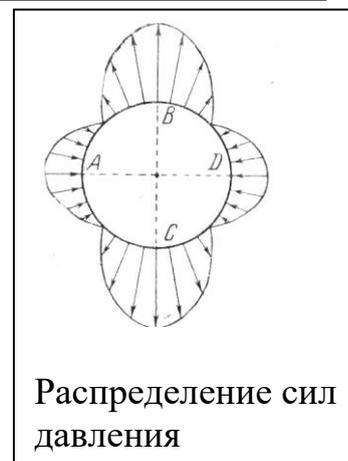
сгущаются, давление становится меньшим среднего давления в жидкости. В областях ВD и CD густота линий тока снова уменьшается, давление возрастает. В точке D токовые линии ведут себя точно так же, как и в точке

А, поэтому в этой точке в соответствии с уравнением

$$\text{Бернулли давление тоже равно } \frac{\rho v^2}{2} + p.$$

Таким образом, распределение сил давления по сравнению со средней силой давления в набегающем потоке качественно соответствуют показанному на рисунке. Для рассмотренного случая плавного (безотрывного) обтекания шара результирующая сила равна нулю. В этом состоит **парадокс Даламбера**.

Для вязкой жидкости возникает сила лобового сопротивления, зависящая от формы тела, числа



Рейнольдса, плотности кинетической энергии, площади поперечного сечения тела. В общем случае для силы лобового сопротивления можно записать

$$F_{лс} = C(Re) \frac{\rho v^2}{2} S,$$

здесь  $C(Re)$  – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от формы тела и числа Рейнольдса  $Re = \frac{\rho l \langle v \rangle}{\eta}$  ( $l$  – характерный размер тела),  $S$  –

площадь поперечного сечения тела. При увеличении числа Рейнольдса роль сил вязкого трения уменьшается, и коэффициент  $C(Re)$  также уменьшается. Наименьшим коэффициентом лобового сопротивления обладает тело каплевидной формы. При обтекании сзади него не образуются области разряжения (области низкого давления). В зависимости от скорости



Ламинарное обтекание

При

тела

жидкости обтекание может носить либо ламинарный характер, либо турбулентный. Два этих типичных случая показаны на рис.7.3.5. и рис.7.3.6. При ламинарном течении коэффициент лобового сопротивления уменьшается обратно пропорционально числу Рейнольдса, а это означает, что сила лобового сопротивления пропорциональна скорости. В частности, для шара она равна (*формула Стокса*)

$$F_{лс} = 6\pi\eta Rv \tag{40}$$

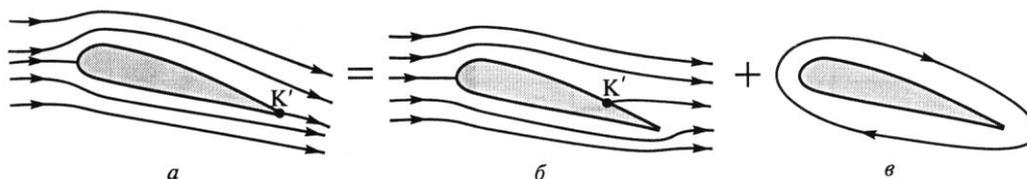
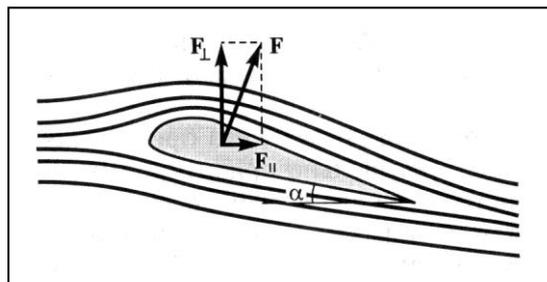
При значениях числа Рейнольдса  $Re=10-30$  за цилиндром возникает пара вихрей (см. рисунок). При увеличении дальнейшем увеличении  $Re$ . Вихри увеличиваются и поочередно отрываются от поверхности шара, возникает дорожка Кармана.



Турбулентный характер обтекания

### П.9.3.3. Подъемная сила. Формула Жуковского. Эффект Магнуса.

При обтекании сил несимметричной формы на тело действует сила, направленная под углом к потоку. В частности при обтекании воздухом крыла самолета возникает подъемная сила. Качественная картина линий тока показана на рис.7.3.7. Угол  $\alpha$  называется углом атаки. Подъемная сила равна нулю при  $\alpha=0$  увеличивается при увеличении угла атаки, достигает максимального значения и начинает уменьшаться при образовании интенсивных завихрений над крылом самолета. Жуковский (1906 г.) показал, что обтекание крыла можно представить как суперпозицию безвихревого движения жидкости и циркуляционного движения вокруг крыла. Качественно это условие поясняется рис. 7.3.8.



Расчет подъемной силы может быть произведен следующим образом

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}$$

Сила, действующая на элемент крыла длиной  $dl$

$$dF = (p_n - p_e)Ldl$$

здесь  $L$ -длина крыла

разность давлений определим через скорости

$$p_n - p_e = \frac{\rho v_e^2}{2} - \frac{\rho v_n^2}{2}$$

скорости берутся в симметричных точках относительно средней линии крыла. Учитывая, что  $v_e + v_n = 2v$  получаем выражение для подъемной силы

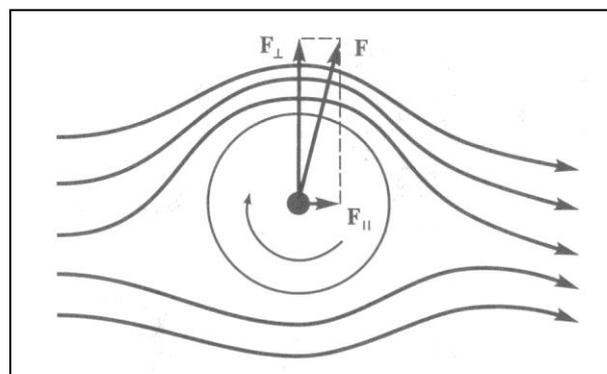
$$F_{\perp} = \int dF = \rho v L \int_0^b (v_e - v_n) dl = \rho v L \Gamma \quad (41)$$

Это **формула Жуковского**. Величина  $\Gamma$  называется циркуляцией и зависит от формы крыла и угла атаки.

**Эффект Магнуса** состоит в возникновении подъемной силы при обтекании воздухом вращающегося цилиндра.

Качественное возникновение этой силы иллюстрируется на рисунке.

Силы вязкости с разных сторон



цилиндра играют разную роль – сверху силы вязкости не тормозят движение воздуха в пограничном слое ( и даже способствуют этому движению). Внизу наоборот воздух в пограничном слое тормозится силами вязкости. В результате смещается вниз точка лобового сопротивления, наверху сгущаются линии тока, возникает подъемная сила.