



Волны в однородных и неоднородных средах

Лекция 9

<http://aislepkov.phys.msu.ru>



Тема 2. Нелинейные волны.

2.2. Нелинейные волны в средах без дисперсии и диссипации

2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии.

2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

2.4. Нелинейные волны в среде с дисперсией.

2.4.1. Волны на мелкой воде. Уравнение Картевега-де-Вриза.

2.4.2 Качественный анализ решений КдВ.

2.4.3. Точное решение уравнения КдВ

2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

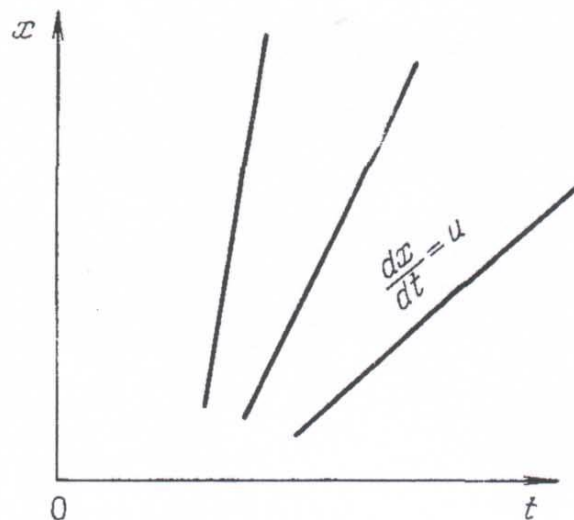
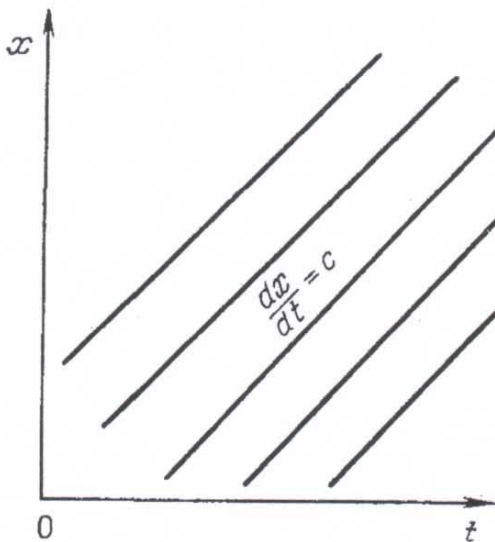
$$\frac{dx}{dt} = v(u)$$

$$\frac{du}{dt} = 0$$

Уравнения характеристик

2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = v(u) \\ \frac{du}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad \text{Уравнения характеристик}$$



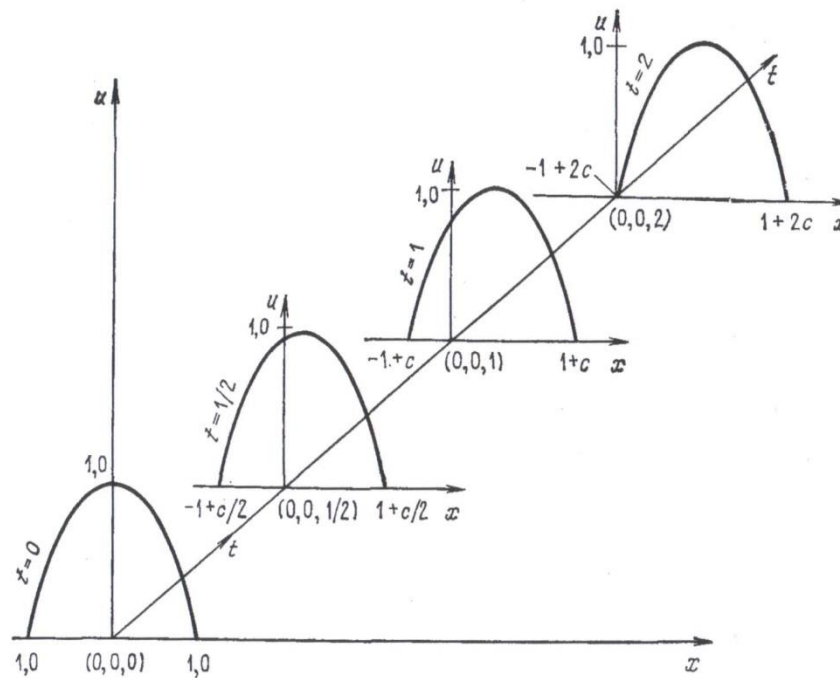
2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

Распространение параболического импульса

$$u(x,0) = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{при } |x| \leq a \\ 0 & \text{при } |x| > a \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} a^2 - (x - vt)^2 & \text{при } |x - vt| \leq a \\ 0 & \text{при } |x - vt| > a \end{cases}$$

2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

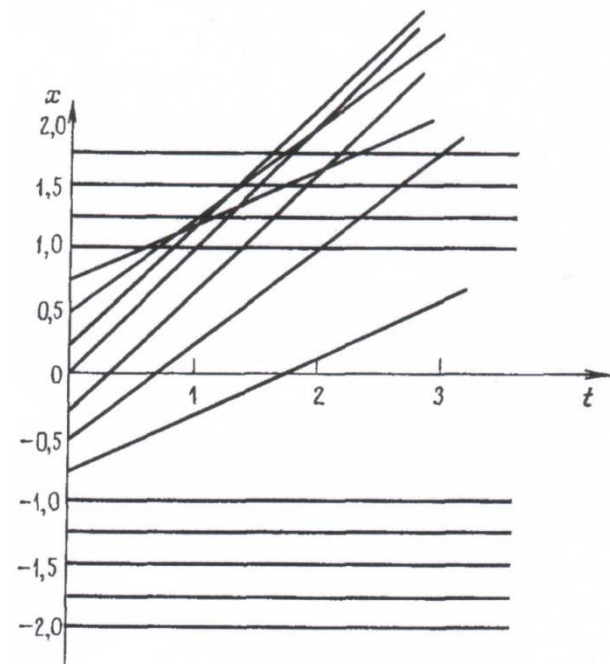


Распространение импульса в линейной среде

2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

$$u(x,0) = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{при } |x| \leq a \\ 0 & \text{при } |x| > a \end{cases}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} a^2 - (x - ut)^2 & \text{при } |x - ut| \leq a \\ 0 & \text{при } |x - ut| > a \end{cases}$$



2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^2} \left((2xt - 1) \pm \left(1 - 4xt + 4a^2 t^2 \right)^{1/2} \right) & \text{при } |x - ut| \leq a \\ 0 & \text{при } |x - ut| > a \end{cases}$$

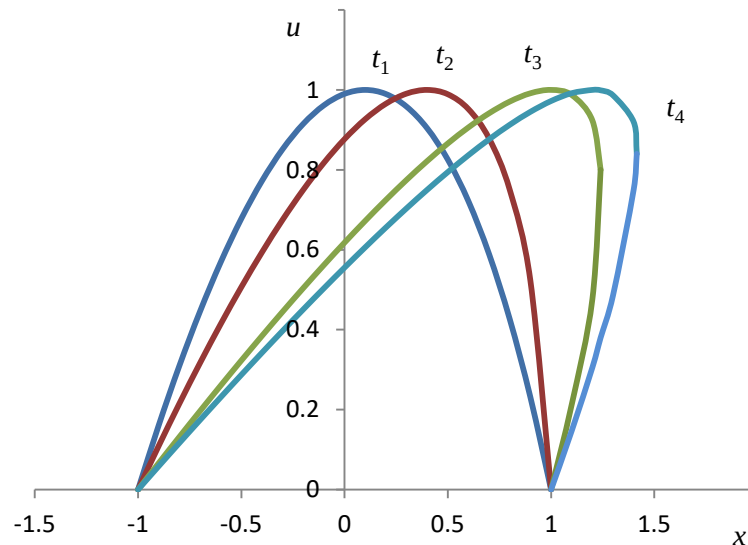


Рис. 2.4. Изменение формы параболического импульса со временем; $a=1.0$, $v=u$, $t_1=0.1$, $t_2=0.4$, $t_3=1.0$, $t_4=1.2$.

П.2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

Уравнение Эйлера

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} \equiv \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \vec{f} + \eta \Delta \vec{u}$$

Уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнение Бюргерса

П.2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \text{const}$$

П.2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



$$u = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln w$$



$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$



$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} dy$$

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{1}{\nu} \psi(x, t, y)} dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\nu} \psi(x, t, y)} dy}$$

$$\psi(x, t, y) = \frac{1}{2t} (x-y)^2 + \int_0^y u_0(z) dz$$

2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

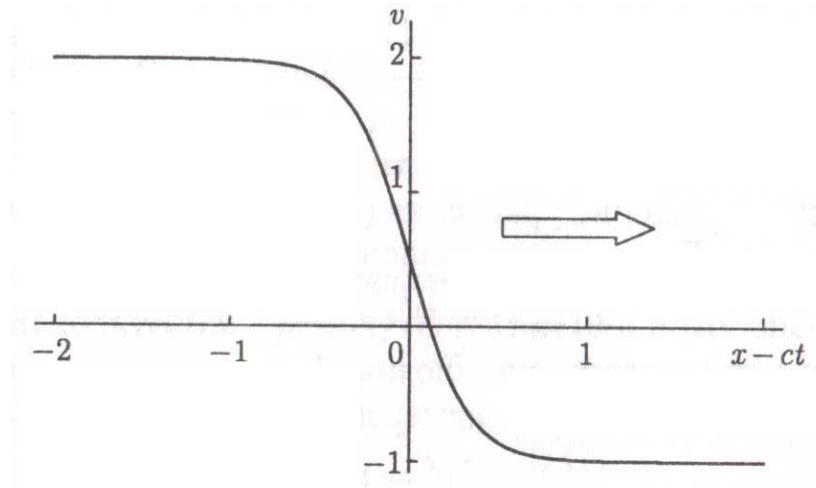
$$u(x, t) = u(x - \nu t) \quad \xi = x - \nu t$$

$$u \rightarrow u_1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty$$

$$u \rightarrow u_2 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty$$

$$u' \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty$$

2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией



$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} - \frac{u_1 - u_2}{2} \operatorname{th} \frac{u_1 - u_2}{2v} (x - vt)$$



Тема 2. Нелинейные волны.

2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

2.4. Нелинейные волны в среде с дисперсией.

2.4.1. Волны на мелкой воде. Уравнение Картевега-де-Вриза.

2.4.2 Качественный анализ решений КдВ.

2.4.3. Точное решение уравнения КдВ

▪

2.4. Нелинейные волны в среде с дисперсией.

2.4.1. Волны на мелкой воде. Уравнение Картевега-де-Вриза.

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) th(kh) \quad \Rightarrow \quad \omega = \nu k - \beta k^3$$



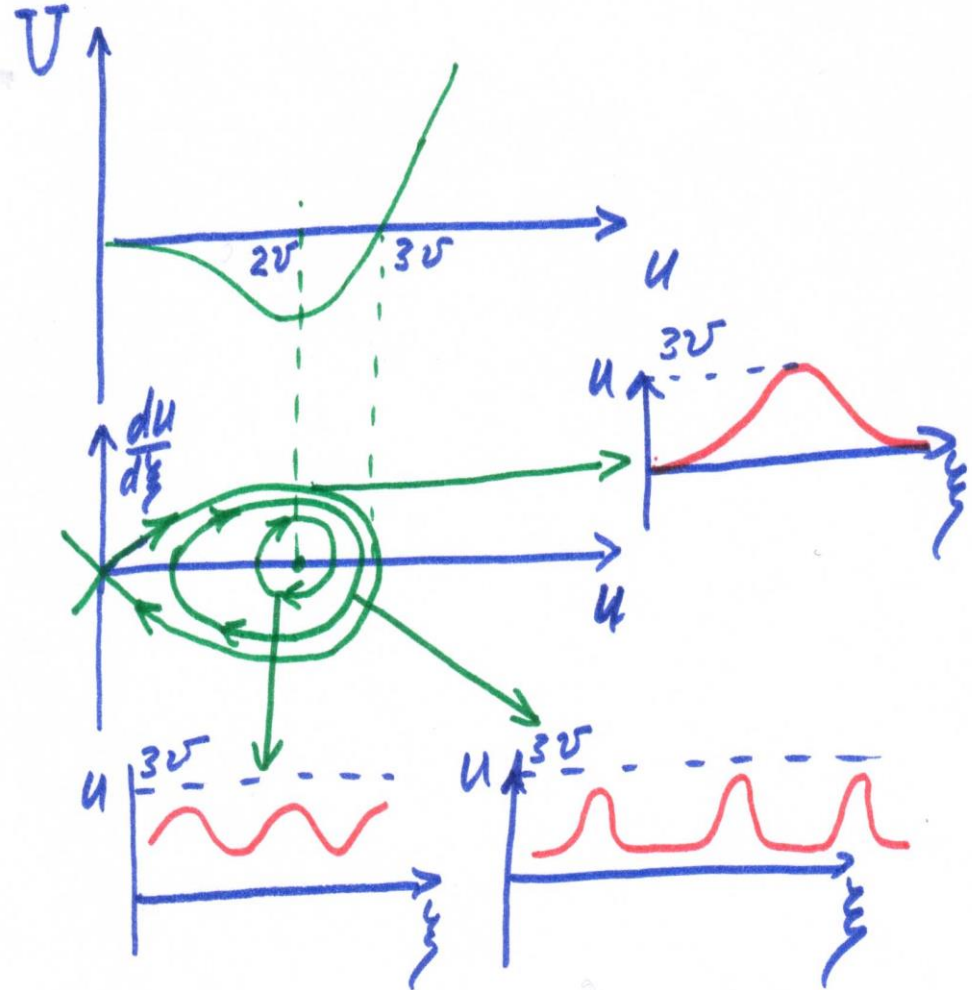
$$\omega \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial t}, k \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

П.2.4.2 Качественный анализ решений КдВ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

П.2.4.2 Качественный анализ решений КдВ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

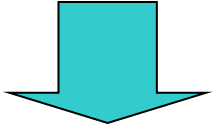


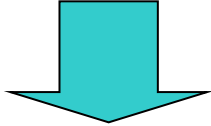
П.2.4.3. Точное решение уравнения КдВ.

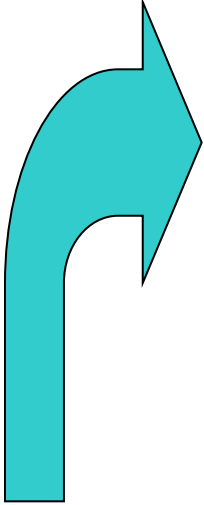
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v_0 + u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

- уравнение КдВ

$$u(x, t) = u(x - vt) \equiv u(\xi)$$


$$\beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} + (u - u_0) \frac{du}{d\xi} = 0$$


$$\beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{1}{2} u^2 - u \cdot u_0 = A$$


$$U(u) = \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} u^2 \cdot u_0 - Au$$

П.2.4.3. Точное решение уравнения КдВ.

отступление

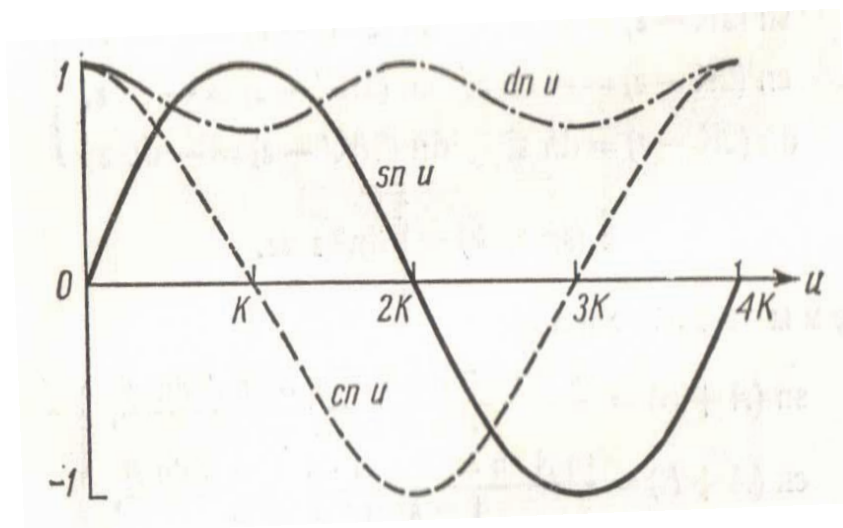
$$t = \int_0^{amt} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\text{sn}(t) = \sin(\text{am } t)$$

$$\text{cn}(t) = \cos(\text{am } t)$$

$$\text{dn}(q, t) = \Delta(q, amt) = \sqrt{1 - q^2 \text{sn}^2 t}$$

$$K \equiv K(q) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(1-q^2 y^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \alpha}}$$



П.2.4.3. Точное решение уравнения КдВ.

Пусть $u_3=0$. Тогда $A=0$, $B=0$, $u_1=3u_0$

$$u(x-vt) = \frac{3u_0}{ch^2\left(\mu \cdot (x-vt)\right)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{u_0}{4\beta}}$$

$$u_0 = V - V_0$$

ВЫВОДЫ.

- 1) Чем выше солитон, тем он уже.
- 2) Чем солитон шире, тем он медленнее бежит и тем меньше его амплитуда.

П.2.4.3. Точное решение уравнения КдВ.

"Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, то есть округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним вертом, и, когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые удалось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал волной трансляции; теперь это название общепринято.

П.2.4.3. Точное решение уравнения КдВ.



Уединенная волна в канале Форз-Клайд

Задание к лекции 9

1. Получите ограниченное стационарное решение линеаризованного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2. Скорость волн малой амплитуды на поверхности канала равна v_0 , солитон движется со скоростью v_1 . Амплитуда солитона увеличилась в 3 раза, как изменилась его скорость.