Механика

Лекция 18

Качка корабля всегда вредна…Вполне естественно поэтому, что измышляли и измышляют способы если не для уничтожения, то по крайней мере для ослабления качки

Л.И.Мандельштам.
О научных работах А.Н.Крылова

aislepkov.phys.msu.ru

Лекция 18
План

Глава 7. Колебания

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.2.Моды колебаний

7.4.3.Биения в связанных системах

П.7.5. Нелинейные колебания.

П.7.6. Параметрические колебания.

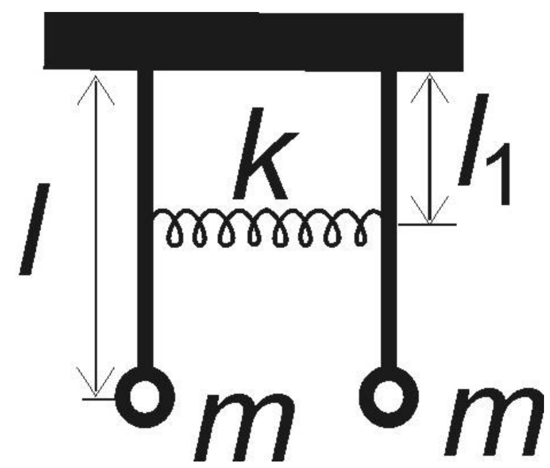
П.7.7. Автоколебания.

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.1.Уравнение колебаний для связанных систем

$$\ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \lambda_1 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \lambda_2 x_1 = 0$$



П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.2.Моды колебаний

$$\ddot{\tilde{x}}_1 + \omega_{01}^2 \tilde{x}_1 - \lambda_1 \tilde{x}_2 = 0$$

$$\ddot{\tilde{x}}_2 + \omega_{02}^2 \tilde{x}_2 - \lambda_2 \tilde{x}_1 = 0$$

$$2\omega_{1,2}^2 = \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2}$$

$$2\zeta_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1}\left(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2 \mp \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\lambda_1 \lambda_2}\right)$$

$$\zeta = \frac{x_{20}}{x_{10}}$$

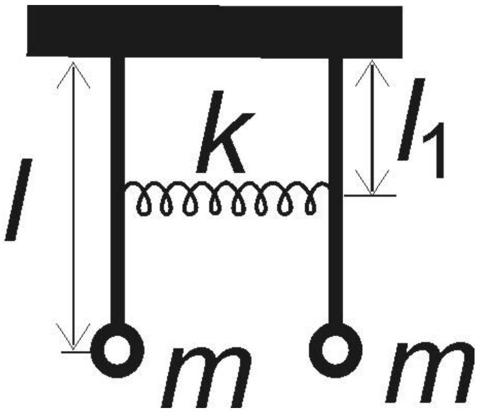
П.7.4. Колебания в связанных системах.

$$2\omega_{1,2}^2=\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\pm\sqrt{(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^2+4\lambda_1\lambda_2}$$

$$2\zeta_{1,2}=\frac{1}{\lambda_1}\left(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2\mp\sqrt{(\omega_{01}^2-\omega_{02}^2)^2+4\lambda_1\lambda_2}\right)$$

Пример.

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2},\qquad \omega_{01}^2=\omega_{02}^2=\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2},$$



$$\omega_1^2=\frac{g}{l},\zeta_1=1$$

$$\omega_2^2=\frac{g}{l}+2\frac{k}{m}\frac{l_1^2}{l^2},\zeta_2=-1$$

Лекция 18
План

Глава 7. Колебания

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.1.Уравнение колебаний для связанных систем

7.4.2.Моды колебаний

7.4.3.Биения в связанных системах

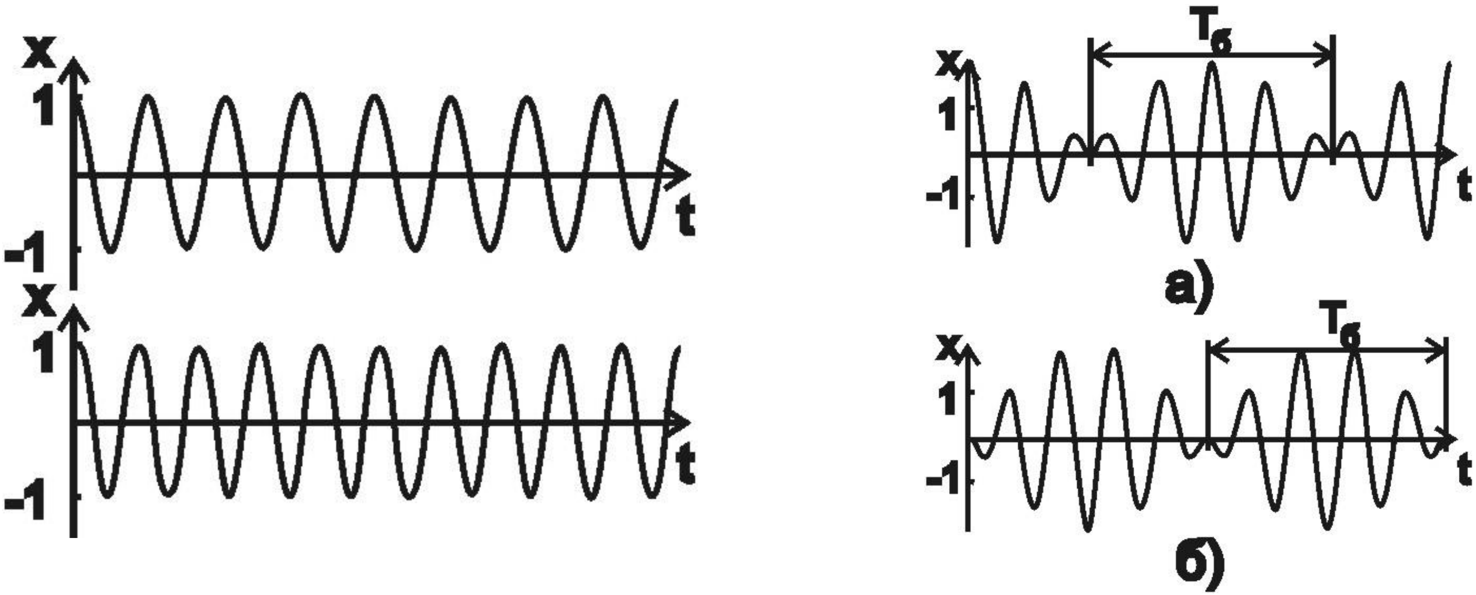
П.7.5. Нелинейные колебания.

П.7.6. Параметрические колебания.

П.7.7. Автоколебания.

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.3.Биения в связанных системах



Лекция 18
План

Глава 7. Колебания

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.1.Уравнение колебаний для связанных систем

7.4.2.Моды колебаний

7.4.3.Биения в связанных системах

П.7.5. Нелинейные колебания.

П.7.6. Параметрические колебания.

П.7.7. Автоколебания.

П.7.5. Нелинейные колебания.

$$\boxed{\ddot{x}_1 + f(x) = 0}$$

$$f(x) = f_1 \cdot x + f_2 \cdot x^2 + f_3 \cdot x^3 + \ldots$$

П.7.5. Нелинейные колебания.

$$\psi = \psi_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \varepsilon \cdot \cos(3(\omega t + \varphi))$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega_0{}^2\psi - \frac{1}{6}\omega_0{}^2\psi^3 = 0$$

$$\cos(\omega t + \varphi)\left[-\omega^2\psi_0 + \omega_0{}^2\psi_0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\omega_0{}^2\psi_0{}^3\cdot 3\right] +$$

$$\cos(3(\omega t + \varphi))\left[\omega_0{}^2\psi_0\varepsilon + \varepsilon\left(-9\omega^2\right)\psi_0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\omega_0{}^2\psi_0{}^3\right] = 0$$

Лекция 18
План

Глава 7. Колебания

П.7.4. Колебания в связанных системах.

7.4.1.Уравнение колебаний для связанных систем

7.4.2.Моды колебаний

7.4.3.Биения в связанных системах

П.7.5. Нелинейные колебания.

П.7.6. Параметрические колебания.

П.7.7. Автоколебания.

П.7.6. Параметрические колебания.

$$\boxed{\ddot{x} + \chi_1(t)\dot{x} + \chi_2(t)x = 0}$$

Пример. Математический маятник.

$$2(A^{+} + A^{-}) + A_{mp} = 0$$

$$\psi = \psi_0 \cos \omega t$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16}\psi_0^2\right)$$

П.7.6. Параметрические колебания.

$$\boxed{2(A^{+}+A^{-})+A_{mp}=0}$$

$$A^{+}=\left(mg+\frac{mv^2}{l}\right)\cdot\Delta l=\left(mg+m\psi_0^2\omega^2 l\right)\cdot\Delta l=\left(mg+m\psi_0^2\omega_0{}^2 l\left(1-\frac{\psi_0^2}{8}\right)\right)\cdot\Delta l=$$

$$mg\left(1+\psi_0^2-\frac{\psi_0^4}{8}\right)\cdot\Delta l$$

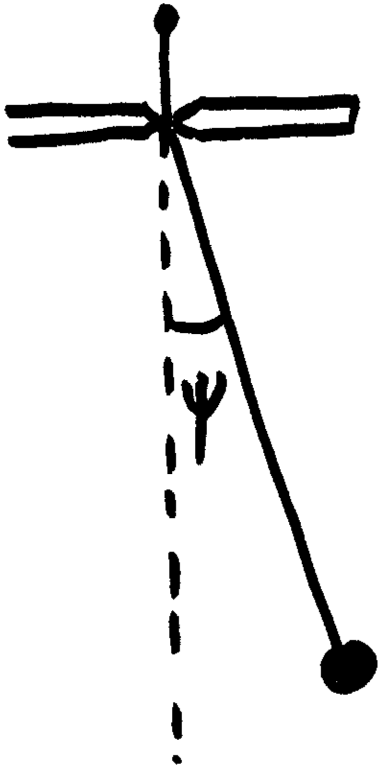
$$A^{-}=-mg\cos\psi_0\cdot\Delta l=-mg\left(1-\frac{\psi_0^2}{2}+\frac{\psi_0^4}{24}\right)\cdot\Delta l$$

$$A_{mp}=\int_0^T F_{mp}v\,dt=-\int_0^T hv^2dt=-h(\psi_0 l\omega)^2\int_0^T\sin^2(\omega t+\varphi)\cdot dt=$$

$$-\frac{1}{2}h(\psi_0 l\omega)^2 T=-h\psi_0^2 l^2\frac{2\pi}{2}\omega$$

П.7.6. Параметрические колебания.

$$\boxed{2(A^{+} + A^{-}) + A_{тр} = 0}$$



$$\psi = \psi_0 \cos\omega t$$

$$\psi_0 = 3\sqrt[4]{1 - \frac{\pi}{3Q \cdot \Delta l / l}\left(\frac{7}{16}\right)}$$