

ЛНКЦИЯ 10**ТЕМА 3.****ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ.****3.1. Основные характеристики электромагнитных полей в продольно однородных направляющих системах.**

Для передачи энергии на расстояния часто используются волноведущие системы - направляющие каналы (волноводы), внутри которых сосредоточен поток мощности, переносимой волной.

Типичные продольно однородные системы показаны на рис 3.1

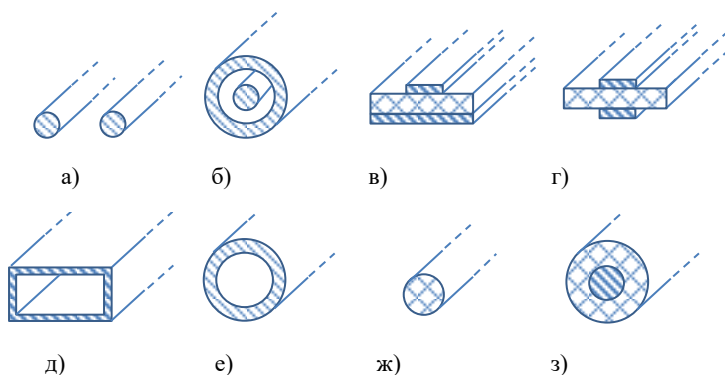


Рис.3.1. типичные волноведущие системы: а) двухпроводная линия, б) коаксиальный волновод, в),г) полосковые линии, д) прямоугольный волновод, е) круглый волновод, ж),з) диэлектрические волноводы.

3.1.1. Свободные поля в продольно однородных системах.

Для электромагнитных волн можно получить волновое уравнение (см. п.1.7). В частности для напряженности электрического поля можно записать

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Воспользуемся волновыми уравнениями для процессов, происходящих на частоте ω .

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0$$

Эти уравнения спроектируем на одну из осей декартовой системы координат, получим скалярные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0. \quad (3.1)$$

Здесь F – это одна из проекций электрического или магнитного поля: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$.

Будем искать решение в виде

$$F = f_1(x, y) \cdot f_2(z). \quad (3.2)$$

Подставляя эту функцию в скалярное уравнение Гельмгольца (3.1), получаем в декартовой системе координат

$$f_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + k^2 f_1 \right) + f_1 \cdot \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = 0$$

Разделяя переменные получаем

$$\frac{(\nabla_{\perp}^2 f_1 + k^2 f_1)}{f_1} + \frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}}{f_2} = 0 \quad (3.3)$$

В соответствии с методом разделения переменных введем константу Γ^2 так, что

$$\frac{\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}}{f_2} = -\Gamma^2$$

Тогда для определения полей в волноводе необходимо решить систему уравнений

$$\nabla_{\perp}^2 f_1 + (k^2 - \Gamma^2) f_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} + \Gamma^2 f_2 = 0 \quad (3.5)$$

Конкретные значения для Γ^2 можно найти из (3.4). Этот вопрос мы рассмотрим в п.3.1.5. Сначала рассмотрим наиболее

важные следствия из уравнения (3.5). Его решение можно представить либо в виде суперпозиции прямых и обратных бегущих волн

$$f_2(z) = Ae^{-i\Gamma z} + Be^{i\Gamma z}, \quad (3.6)$$

либо через гармонические функции

$$f_2(z) = P \cos \Gamma z + q \sin \Gamma z, \quad (3.7)$$

то есть как суперпозицию стоячих волн.

При рассмотрении полей в волноводах воспользуемся решением (3.6). Учитывая введенные обозначения для прямых волн можно записать

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{-i\Gamma z}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{-i\Gamma z} \quad (3.8)$$

Откуда в частности следуют уравнения

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}(x, y) + (k^2 - \Gamma^2) \mathbf{E}(x, y) = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{H}(x, y) + (k^2 - \Gamma^2) \mathbf{H}(x, y) = 0 \quad (3.10)$$

Величину

$$\chi^2 = k^2 - \Gamma^2 \quad (3.11)$$

называют поперечным волновым числом, ее значение определяется поперечным сечением волновода (см. п. 3.1.5).

3.1.2. Связь между продольными и поперечными компонентами полей.

Рассмотрим представление поперечных компонент поля через продольные.

Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.12)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}$$

и запишем их в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu H_x \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0\mu H_y \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu H_z \quad (3.18)$$

Продифференцируем (3.13) по z и воспользуемся (3.8) и (3.17):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\omega\mu_0\mu H_y \right) \quad (3.19)$$

Воспользуемся (3.8) и перепишем (3.19)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} + \Gamma^2 H_y = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu H_y$$

Учитывая, что $\omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = k^2$ получаем

$$(\Gamma^2 - k^2)H_y = i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z}$$

или с учетом (9.11)

$$H_y = \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

Используя такой же подход, определим выражение для компоненты E_y . Продифференцируем (3.16) по z и рассмотрим его совместно с (3.14). Получим

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + \Gamma^2 E_y = -i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_x}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} + i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y \right)$$

Откуда

$$\left(\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 - \Gamma^2 \right) E_y = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + i\omega\mu_0\mu \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

то есть

$$E_y = \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial y} + \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (3.21)$$

Аналогично можно получить соотношения и для других компонент электрического и магнитного поля

$$E_x = \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.22)$$

$$H_x = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z \partial x} \quad (3.23)$$

Перепишем (3.20)-(3.23), используя более короткую векторную запись

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{1}{\chi^2} \nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \text{rot}_\perp \mathbf{H}_z \quad (3.24)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \text{rot}_\perp \mathbf{E}_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_\perp \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (3.25)$$

здесь

$$\nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \quad (3.26)$$

$$\nabla_\perp \frac{\partial H_z}{\partial z} = \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \quad (3.27)$$

и

$$\text{rot}_\perp \mathbf{H}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{pmatrix} = [\nabla_\perp H_z, \mathbf{z}_0], \quad (3.28)$$

$$\text{rot}_{\perp} \mathbf{E}_z = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & E_z \end{pmatrix} = [\nabla_{\perp} E_z, \mathbf{z}_0] \quad (3.29)$$

Аналогично для (3.25)

3.1.3. Классификация плоских волн

Поле, подчиняющееся уравнениям (3.24) (3.25), можно представить как наложение поперечных полей двух типов.

E-волны или *E-тип* (*TM-волны*) лишены продольной магнитной компоненты. Учитывая (3.24), (3.25) для этого типа волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \mathbf{E}_z = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} E_z, \mathbf{z}_0] \quad (3.31)$$

H-волны (*TE-волны*) не имеют продольной компоненты электрического поля. Для них можно записать

$$\mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \mathbf{H}_z = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} [\nabla_{\perp} H_z, \mathbf{z}_0] \quad (3.32)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (3.33)$$

Плоские однородные волны, не имеющие продольных компонент электрического и магнитного поля называются *ТЕМ-волнами*. Из соотношений (3.24) и (3.25) следует, что такие типы волн могут существовать только в случае, когда $\chi=0$, то есть, $\Gamma = k$. *ТЕМ-волны* могут распространяться в коаксиальных волноводах (рис.3.1.б). В свободном пространстве электромагнитные волны также являются поперечными, то есть *ТЕМ-типа*

В волноводах могут также существовать поля, в которых одновременно не равны нулю продольные компоненты электрического и магнитного полей. Их называют «*EH-волнами*» или «*HE-волнами*».

В заключение отметим, что из (3.30)- (3.33) следует связь

$$E_{\perp} = Z_{\epsilon}^{E,H} [H_{\perp}, z_0], \quad (3.34)$$

где $Z_{\epsilon}^{E,H}$ - волновые сопротивления для E и H -волн соответственно. Причем

$$Z_{\epsilon}^E = \frac{\Gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \quad (3.35)$$

$$Z_{\epsilon}^H = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\Gamma} \quad (3.36)$$

В справедливости соотношений (3.35) и (3.36) легко убедиться, если воспользоваться (3.30)-(3.33). В частности, для E - волн.

$$E_{\perp} = \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{i\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} E_z.$$

То есть

$$\begin{aligned} H_{\perp} \equiv H &= \frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} E_z, z_0] = \\ &= \frac{i\omega \epsilon_0 \epsilon}{\chi^2} \left[\frac{\chi^2}{-i\Gamma} E_{\perp}, z_0 \right] = -\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\Gamma} [E_{\perp}, z_0]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Чтобы привести к виду (3.34) умножим (3.37) справа на z_0 :

$$\begin{aligned} [H_{\perp}, z_0] &= -\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\Gamma} [[E_{\perp}, z_0], z_0] = \\ &= \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\Gamma} [z_0, [E_{\perp}, z_0]] = \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\Gamma} E_{\perp} \end{aligned}$$

Откуда следует верность (3.34) и (3.35)

$$E_{\perp} = \frac{\Gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} [H_{\perp}, z_0]$$

Аналогично доказывается выражение (3.36)

3.1.4. Определение полей в направляющих системах.

В п.3.1.1-3.1.3 мы нашли зависимость компонент

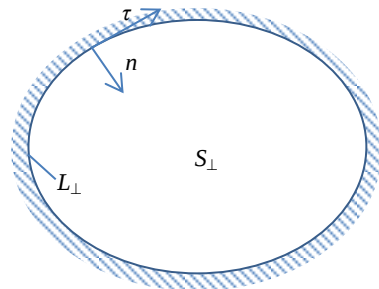


Рис.3.2. Поперечное сечение волноведущей системы.

электромагнитного поля от координаты z , выяснили, что все компоненты электрического и магнитного поля могут быть выражены только через продольные компоненты этих полей. Для полного решения задачи о волнах, распространяющихся в волноводе необходимо определить значения Γ и χ , а также структуру полей "E"- и "H"-типов. Для этого решаются уравнения Гельмгольца для двумерной области произвольного сечения (см. рис. 3.2.) с соответствующими граничными условиями.

В частности для E-типа:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z &= 0 \quad \text{на } S_{\perp} \\ E_z &= 0 \quad \text{на } L_{\perp} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Для H-типа:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z &= 0 \quad \text{на } S_{\perp} \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } L_{\perp} \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $S_{\perp}$ - поперечное сечение направляющей системы, $L_{\perp}$ - контур, ограничивающий $S_{\perp}$.

Поясним кратко постановку граничной задачи для поля H-типа.

Введем в произвольной точке на границе идеального проводника локальную декартову систему координат (см. рис. 3.2).

Из уравнений Максвелла следует

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} - \frac{\partial H_n}{\partial z} = i\omega\epsilon_0\epsilon E_{\tau}$$

Так как на поверхности идеального проводника касательные компоненты электрического поля и нормальные компоненты магнитного поля равны нулю, то

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L_{\perp}$$

Значения χ_n , при которых существуют нетривиальные решения задач (3.38) и (3.39), называются собственными значениями (или поперечными постоянными распространения), а получаемые при этом решения уравнений Максвелла E_n и H_n являются собственными модами волновода E- и H-типов. Свободное поле в волноводе является суперпозицией мод волновода:

$$\mathbf{E}_{\text{волн}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^E \mathbf{E}_n^E + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^H \mathbf{E}_n^H \quad (3.40)$$

$$\vec{H}_{\text{волн}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^E \vec{H}_n^E + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^H \vec{H}_n^H, \quad (3.41)$$

3.1.4. Общие свойства направляемых волн.

Для постоянной распространения волн в однородных волноводах можно записать

$$\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \chi^2} = k \sqrt{1 - \frac{\chi^2}{k^2}} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}, \quad (3.42)$$

здесь $f = \frac{\omega}{2\pi}$ - частота волны, распространяющейся в волноводе,

$f_{\text{кр}} = \frac{\chi \cdot v}{2\pi}$ - критическая частота, минимальное значение частоты

волны, которая может распространяться в волноводе. При $f \geq f_{\text{кр}}$, Γ -реальная величина, соответствует распространяющейся волне, при $f \leq f_{\text{кр}}$, Γ -мнимая, распространение волны невозможно – поле экспоненциально затухает вдоль координаты z . В этом случае для постоянной распространения можно записать.

$$\Gamma = -i|\Gamma| = -ik \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2 - 1}, \quad f < f_{\text{кр}} \quad (3.43)$$

Тогда для поля:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left(\mathbf{E}(x, y) \cdot e^{-|\Gamma|z} \cdot e^{i\omega t} \right).$$

При анализе волноводов в качестве переменной часто используют длину волны $\lambda = \frac{v}{2\pi f}$, тогда

$$\Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} \quad (3.44)$$

где $\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi}$ - критическая длина волны.

Для направляемых волн можно получить выражение для фазовой скорости v_ϕ и длины волны в волноводе Λ (отличается от длины волны в свободном пространстве)

$$\left. \begin{aligned} v_\phi &= \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \\ \Lambda &= \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \end{aligned} \right\} f > f_{кр} \quad (3.45)$$

Здесь, как и раньше, $v = \frac{\omega}{k}$ - скорость ТЕМ волн в свободном пространстве.

Выражения (3.44) определяют закон дисперсии волн в волноведущей системе.

Для групповой скорости получаем

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{d\Gamma} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} \quad f > f_{кр}. \quad (3.46)$$

Из (3.45) и (3.46) следует, что

$$v_\phi v_{gp} = v^2 \quad (3.47)$$

На рис. 3.3. показаны типичные зависимости групповой и фазовой скорости от частоты, а также постоянной распространения от частоты.

1.

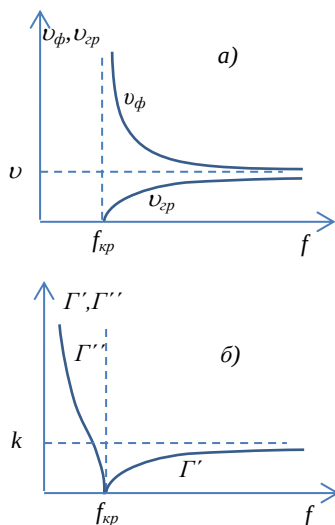


Рис.3.3. Зависимости значений фазовой и групповой скоростей (а), а также реальной (Γ') и мнимой (Γ'') частей постоянной распространения (б) от нормированной частоты.

Задание к лекции 10

1. Доказать верность соотношения

$$Z_{\text{св}}^H = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\Gamma}$$

2. Определить величину (в системе СИ) волнового сопротивления свободного пространства

$$Z_{\text{св}} = \frac{k}{\omega \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Ответы прошу прислать до 21:00 пятницы 30 апреля