

ЛЕКЦИЯ 11

ТЕМА 3.

ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ.

3.2. Волны в прямоугольном волноводе.

3.2.1. Волны Е-типа.¹

Прямоугольный волновод представляет собой направляющую систему в виде металлической трубы прямоугольного сечения (см. рис.3.4.).

Анализ полей в таком волноводе будет проводить в соответствии со схемой, выработанной в предыдущих пунктах. Сначала решаем

уравнение Гельмгольца для продольной компоненты поля для двумерной области с соответствующими граничными условиями. Определяем поперечную постоянную распространения и зависимость продольной компоненты поля от координат x и y .

Для волн Е-типа в прямоугольном волноводе граничную задачу (3.38) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \chi^2 E_z = 0 \quad \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases} \quad (3.49)$$

$$E_z = 0 \quad \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = a \end{cases}$$

Решение этой задачи проводится методом разделения переменных.

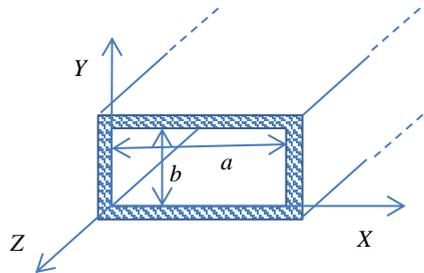


Рис.3.4. Прямоугольный волновод

¹ См., например: В. В. Никольский, Т. И. Никольская. Электродинамика и распространение радиоволн. 2017г

Положим, что оно имеет вид.

$$E_z(x, y) = f_1(x)f_2(y) \quad (3.50)$$

Тогда

$$f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + f_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \chi^2 f_1 f_2 = 0$$

И уравнение распадается на два

$$\frac{d^2 f_1}{\partial x^2} = \chi_x^2, \quad (3.51)$$

$$\frac{d^2 f_2}{\partial y^2} = \chi_y^2, \quad (3.52)$$

причем

$$\chi_x^2 + \chi_y^2 = \chi^2. \quad (3.53)$$

Решениям уравнений (3.51), (3.52) являются гармонические функции. Поскольку продольная компонента поля на металлической границе волновода обращается в ноль, решение будет иметь вид

$$E_z \equiv E_z^{mn} = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{cases} m=1,2,\dots \\ n=1,2,\dots \end{cases}. \quad (3.54)$$

Причем найденным собственным функциям (3.54) отвечают собственные значения

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a}, \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$$

или

$$\chi^2 \equiv \chi_{mn}^2 = \chi_{xm}^2 + \chi_{yn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (3.55)$$

Таким образом, задача (3.38) имеет бесконечный ряд решений, каждому соответствует определенная структура поля $E_z(x, y)$ и свое собственное значение χ_{mn} . Поле, соответствующее этому распределению называют модой волновода - волной типа E_{mn} . Типичные распределения продольной компоненты поля в

поперечном сечении волновода для нескольких низших мод показаны на рис. 3.5.

Полное поле для волны E типа находится по формулам (3.30), (3.31):

$$\mathbf{E} = E_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

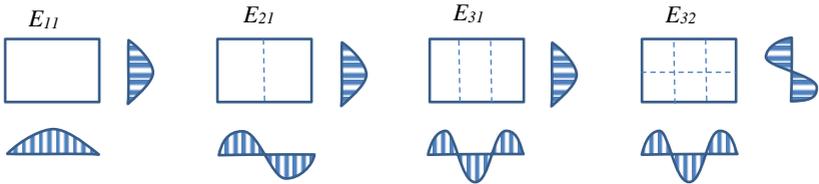


Рис.3.5. Распределения поля E_z в поперечном сечении прямоугольного волновода для нескольких низших мод

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \mathbf{E}_z = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} E_z, \vec{z}_0].$$

При подстановке в них

$$E_z = E_z^{mn} e^{-i\Gamma z} = E_0 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \cdot e^{-i\Gamma z}$$

и

$$\mathbf{E}_{\perp} = \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z} = (-i\Gamma) \left(\mathbf{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)$$

Получаем для электрической компоненты:

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\mathbf{z}_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y - i \frac{\Gamma}{\chi^2} \left(\mathbf{x}_0 \chi_x \cos \chi_x x \sin \chi_y y + \mathbf{y}_0 \chi_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y \right) \right] \cdot e^{-i\Gamma z} \quad (3.56)$$

Аналогично для напряженности магнитного поля. Учтем (3.26):

$$\nabla_{\perp} E_z = x_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + y_0 \frac{\partial E_z}{\partial y},$$

тогда из (3.31)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} E_z, z_0] = \\ &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{iE_0}{Z_6^E} \frac{\Gamma}{\chi^2} \cdot \\ &\cdot \left[(\vec{x}_0 \chi_y \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) + \vec{y}_0 \chi_x \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y)) \right] \cdot \\ &\cdot e^{-i\Gamma z} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Здесь, как и ранее, обозначено

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.58)$$

$$Z_6^E = \frac{\Gamma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{Z_{ce}}{k\varepsilon} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.59)$$

Используемая в (3.59) под величиной Z_{ce} подразумевается волновое сопротивление свободного пространства

$$Z_{ce} = \frac{k}{\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (3.60)$$

Типичная картина силовых линий для полей E - типа в прямоугольном волноводе показана на рис. 3.6

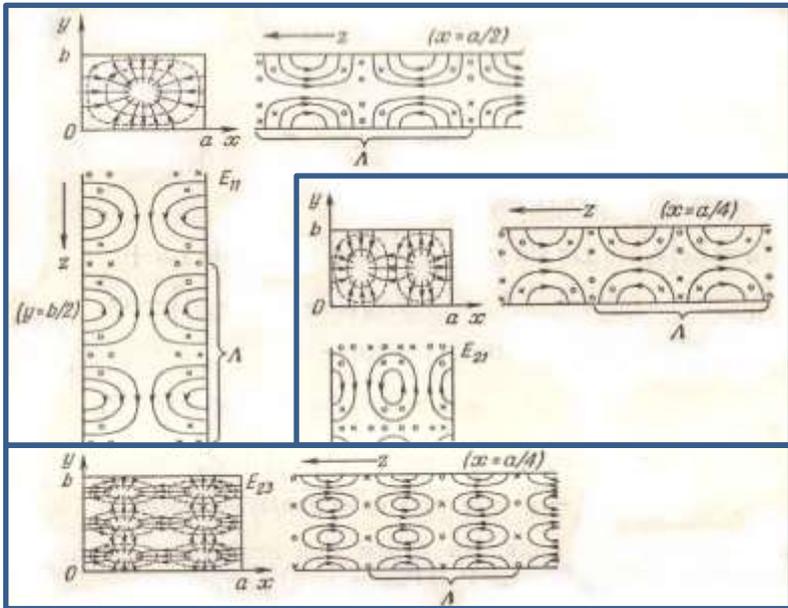


Рис.3.6. Силовые линии электрического (сплошные линии) и магнитного (штриховые линии) полей в прямоугольном волноводе прямоугольного волновода для нескольких низших мод: E_{11}, E_{21}, E_{23}

3.2.2. Волны Н-типа в прямоугольном волноводе.

Рассмотрим особенности волн Н-типа в прямоугольном волноводе. Граничная задача, решаемая в этом случае, ставится в соответствии с п. 3.1.4., для продольной компоненты магнитного поля. Учитывая геометрию волновода (см. рис. 3.4.) и выбранную систему координат, запишем ее в следующем виде

$$\nabla_{\perp}^2 H_z + \chi^2 H_z = 0 \quad \begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < b \end{cases}, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = b \end{cases}.$$

Решение этой задачи, также как и для волн Е-типа (см.(3.50)-(3.55)), находим методом разделения переменных. Учитывая граничные условия (3.61) Получаем

$$H_z \equiv H_z^{mn} = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{cases} m = (0), 1, 2, \dots \\ n = (0), 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

В отличие от полей E -типа поле H_z не обращается в ноль, если один из индексов m или n равен нулю

Распределения поля H_z в поперечном сечении волновода для нескольких мод показаны на рис. 10.4.

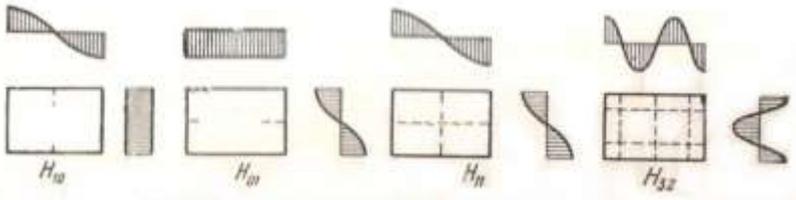


Рис.3.7. Распределения поля H_z в поперечном сечении прямоугольного волновода для нескольких низших мод: H_{10} , H_{01} , H_{11} , H_{32}

Используя (3.32), (3.33) найдем напряженности электрического и магнитного полей.

$$\mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} [\nabla_{\perp} H_z, \mathbf{z}_0] = -iZ_6^H \frac{\Gamma}{\chi^2} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Подставляя (3.62) в (3.63) получаем окончательно выражения для напряженности электрического поля.

$$\mathbf{E} = iZ_6^H H_0 \left[\frac{\Gamma}{\chi^2} (\mathbf{x}_0 \chi_y \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y) - \mathbf{y}_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y) \right] e^{-i\Gamma z} \quad (3.64)$$

Для определения напряженности магнитного поля воспользуемся (3.33):

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial H_z}{\partial z} = \mathbf{H}_z + \frac{-i\Gamma}{\chi^2} \left(\mathbf{x}_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (3.65)$$

Подставляя (3.62) в (3.65) получаем выражение для напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H} = H_0 [z_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y + i \frac{\Gamma}{\chi^2} (x_0 \chi_x \sin(\chi_x x) \cos(\chi_y y) + y_0 \chi_y \cos(\chi_x x) \sin(\chi_y y))] \cdot e^{-i\Gamma z} \quad (3.66)$$

Здесь обозначено

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a}, \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$$

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \varepsilon\mu - \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)}$$

$$Z_6^H = \frac{\omega\mu\mu_0}{\Gamma} = \frac{Z_{ce} k}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \varepsilon\mu - \left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)}} \quad (3.67)$$

Картина силовых линий для моды Н типа показана на рис. 3.8

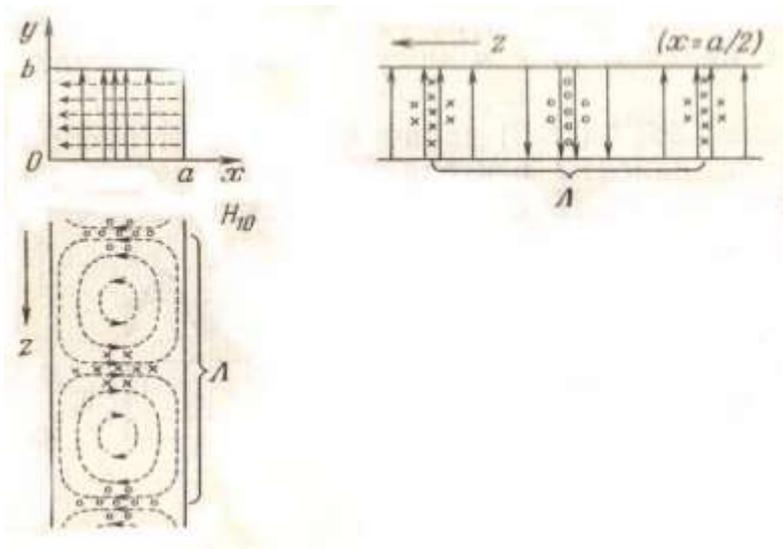


Рис.3.8. Силовые линии электрического (сплошные линии) и магнитного (штриховые линии) полей в прямоугольном волноводе прямоугольного волновода для моды H_{10}

3.2.3. Основная мода прямоугольного волновода

Рассмотрим значения критической частоты и длины волны для полей Е- и Н- типов в прямоугольном волноводе. Необходимые выражения мы уже получили в п. 3.1.4:

Для поля Е-типа

$$f_{кр} = \frac{\chi \nu}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} \quad (3.68)$$

В приложении к прямоугольному волноводу они принимают вид

$$f_{кр}^{mm} = \frac{\nu}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (3.69)$$

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (3.70)$$

Основной модой волновода называют моду, для которой критическая частота минимальна.

Основной моде для поля Е-типа (см. п.3.2.1) соответствуют значения $m=1$ и $n=1$. Поскольку критическая частота прямоугольного волновода определяется размерами поперечного сечения, то для значений $m=1$ и $n=1$, критические частоты для Е-типа и Н- типа будут одинаковыми:

$$\left(f_{кр}^{11}\right)^E = \left(f_{кр}^{11}\right)^H = f_{кр}^{11} = \frac{\nu}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = \frac{\nu}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(ab)^2}} \quad (3.71)$$

Для Н типа возможны значения $m=1$ и $n=0$ и $m=0$ и $n=1$. Для этих мод критические частоты равны

$$f_{кр}^{10} = \frac{\nu}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (3.72)$$

$$f_{кр}^{01} = \frac{\nu}{2b\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (3.73)$$

Им соответствуют критические значения длин волн

$$\begin{aligned}\lambda_{кр}^{10} &= 2a, \\ \lambda_{кр}^{01} &= 2b.\end{aligned}\tag{3.74}$$

В том случае, когда $a > b$ **основной является волна H_{10}** . Учитывая, что

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(ab)^2}},$$

получаем, что в прямоугольном волноводе в диапазоне частот $f_{кр}^{10} \leq f \leq f_{кр}^{01}$ может распространяться лишь одна мода с известной структурой поля. Эта особенность волновода, а также высокая технологичность в изготовлении используется в технике передачи энергии. Для каждого диапазона частот имеются свои стандарты. В таблице приведены стандарты размеров волноводов на несколько диапазонов частот

Таблица 3.1

$a \times b$ (мм)	f ГГц
72,136x34,036	2.6-3.95
86,360x43,180	1.7-3.4
109,22x54,610	1.7-2.6

3.3. Волны в круглом волноводе.

Круглые волноводы представляют собой полную направляющую систему в виде кругового цилиндра. Также как и в прямоугольных волноводах в нем могут распространяться волны Е- и Н- типов.

3.3.1. Е-тип волн в круглом волноводе.

Для волн Е-типа ставится следующая граничная задача см п. 3.1.4.

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp}^2 E_z + \chi^2 E_z &= 0 \text{ на } S_{\perp} \\ E_z &= 0 \text{ на } L_{\perp}\end{aligned}\tag{3.75}$$

Для круглого волновода удобно использовать цилиндрическую систему координат. В этом случае (3.75) имеет вид

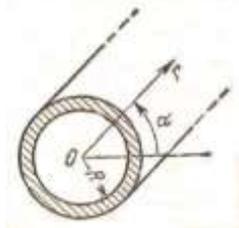


Рис.3.9. Круглый волновод

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \alpha^2} + \chi^2 E_z = 0$$

$$\begin{cases} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, \end{cases} \quad (3.76)$$

$E_z = 0$ при $r = R$.

Уравнение (3.76) решаем методом разделения переменных

Положим.

$$E_z = f_1(r) \cdot f_2(\alpha)$$

После подстановки в (3.76)

Получаем, что внутри круглого волновода выполняется уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f_2(\alpha)}{\partial \alpha^2} + \chi^2 = 0$$

Это уравнение делится на два:

$$\frac{\partial^2 f_2(\alpha)}{\partial \alpha^2} = -n^2 f_2(\alpha) \quad (3.77)$$

и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) f_1(r) = 0 \quad (3.78)$$

Решение этих двух уравнений представим в виде

$$E_z = E_z^{nm} = J_n(\chi_{nm} r) A(n\alpha), \quad (3.79)$$

где $A(n\alpha)$ -решение уравнения (3.77),

$$A(n\alpha) = C \cos n\alpha + D \sin n\alpha. \quad (3.80)$$

а $J_n(\chi_{nm} r)$ - функции Бесселя n -го порядка.

Этим собственным функциям (3.78) отвечают собственные значения

$$\chi^2 = \chi_{nm}^2 = \left(\frac{\mu_{nm}}{R} \right)^2, \quad (3.81)$$

где μ_{nm} - корни уравнения $J_n(x) = 0$. Часть из этих корней представлены в таблице 3.2

Таблица 3.2.

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Учтем далее, что

$$E_z(r, \alpha, z) = z_0 E_z^{nm}(r, \alpha) e^{-i\Gamma z}$$

А также (3.30) и (3.31):

$$\mathbf{E} = E_z + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\mathbf{H} = \frac{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} E_z = \frac{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} E_z, \mathbf{z}_0].$$

Учитывая, что для цилиндрической системы координат:

$$\nabla_{\perp} \frac{\partial E_z}{\partial z} = -i\Gamma \left(\mathbf{r}_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \alpha_0 \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} \right),$$

и

$$[\nabla_{\perp} E_z, \mathbf{z}_0] = \begin{pmatrix} \frac{r_0}{r} & \alpha_0 & z_0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} & \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем окончательное выражение для напряженности электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \{ & z_0 J_n(\chi r) A(n\alpha) - i \frac{\Gamma}{\chi^2} [r_0 \chi J'_n(\chi r) A(n\alpha) + \\ & + \alpha_0 \frac{n}{r} J_n(\chi r) A'(n\alpha)] \} e^{-i\Gamma z} \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z^E} \frac{i\Gamma}{\chi^2} \left[\mathbf{r}_0 \frac{n}{r} J'_n(\chi r) A'(n\alpha) - \right. \\ \left. + \alpha_0 \chi J'_n(\chi r) A(n\alpha) \right] e^{-i\Gamma z}, \quad (3.83)$$

где $J'_n(\chi r)$ - производная $J_n(\chi r)$ по χr , $A'(n\alpha)$ - производная $A(n\alpha)$ по $n\alpha$. Кроме этого, учитывая (3.81), получаем

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2}, \quad (3.84)$$

$$Z^E = \frac{\Gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Z_{св}}{k} \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon \mu - \left(\frac{\mu_{nm}}{R}\right)^2}. \quad (3.85)$$

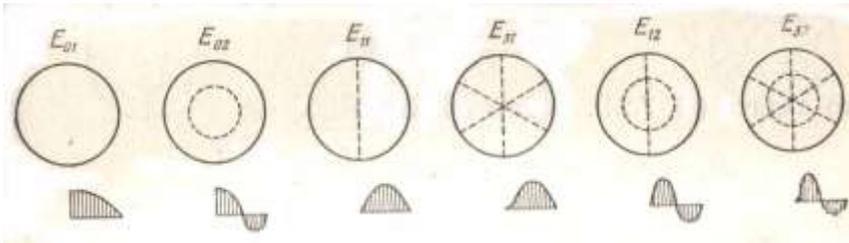


Рис.3.10. Распределения поля E_z в поперечном сечении круглого волновода для нескольких низших мод: E_{01} , E_{02} , E_{11} , E_{12} , E_{32} . Штриховые линии соответствуют нулевому значению поля.

Профили компоненты E_z для волн E типа показаны на рис.3.10

На следующих рисунках 3.11 и 3.12 представлены силовые линии для полей нескольких мод E - типа круглого волновода.

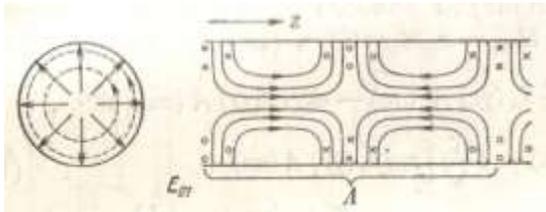


Рис.3.11. Силовые линии электрического (сплошные линии) и магнитного (штриховые линии) полей в круглом волноводе для моды E_{01}

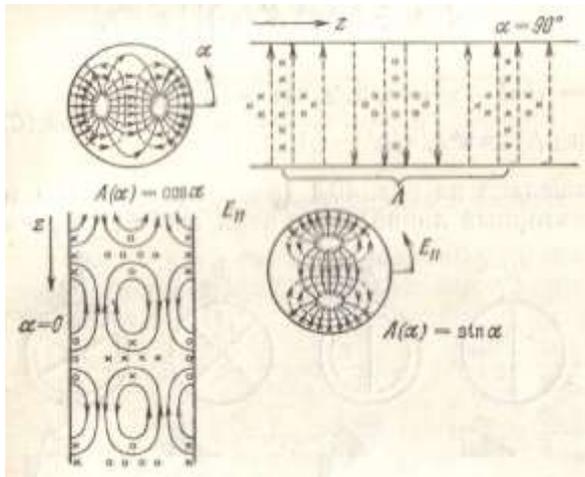


Рис.3.12. Силовые линии электрического (сплошные линии) и магнитного (штриховые линии) полей в круглом волноводе для моды E_{11}

Определим критические частоты и длины волн для E- типа мод в круглом волноводе. Поскольку, $f_{кр} = \frac{\chi \nu}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}}$, $\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi}$ (см. (3.42),

лекция 10), а $\chi_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{R}$ (см.(3.81)), то для круглого волновода

$$f_{кр}^{nm} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{\mu_{nm}}{R},$$

$$\lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi R}{\mu_{nm}} \quad (3.86)$$

При $\lambda > \lambda_{кр}$ волна не может распространяться в волноводе. Для круглого волновода и E-типа волн максимальная длина волны соответствует моде E_{01} . В этом случае $\lambda_{кр}^{01} = \frac{2\pi}{\mu_{01}} R \approx 2.6R$. Для

других мод значения параметра $\frac{\lambda_{кр}}{R}$ приведены в следующей таблице

Таблица 3.3.

$m \backslash n$	1	2	3	4
<i>E</i> -волны				
0	2,612	1,138	0,726	0,5328
1	1,64	0,8955	0,6176	0,4716
2	1,223	0,7464	0,5407	0,4246
3	0,9847	0,6436	0,4827	0,3873

Вопросы к лекции 11.

3. Дана полоса частот: 10-15 ГГц. Определить размеры прямоугольного волновода, способного передавать энергию в данном диапазоне в одномодовом режиме.

4. Определить поток энергии в прямоугольном волноводе для основной моды (H_{10}), если размеры волновода a и b ($a > b$). Величину H_0 считать известной. (Указание: воспользоваться вектором Умова-Пойнтинга и выражениями для поперечных компонент поля).

Ответы прошу прислать до 21:00 пятницы 7 мая