# ТЕМА 2

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

## 2.1 Введение

Для нелинейных колебаний основной моделью нелинейной системы является нелинейный осциллятор, описываемый уравнением

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f(x) = 0.$$

В теории нелинейных волн таких моделей несколько. Мы рассмотрим особенности проявления нелинейных свойств при распространении волн с большой амплитудой, когда скорость волны начинает зависеть от ее амплитуды, распространение волн в средах с затуханием, а также проявление нелинейных свойств при распространении волн в средах с дисперсией.

В нелинейной среде без диссипации и дисперсии распространение плоской волны описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{2.1}$$

Если в нелинейной среде присутствует затухание, распространение плоской волны описывается одномерным аналогом уравнения Навье Стокса - уравнением Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

здесь $\nu$ – кинематическая вязкость.

Для сред с дисперсией особенности нелинейных процессов мы рассмотрим на примере уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{2.3}$$

## 2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии и диссипации.

### 2.2.1. Кинематические волны.

Прежде, чем переходить к модели сплошной среды, рассмотрим, как распространяется импульс в среде, состоящей из невзаимодействующих частиц. Для примера выберем простейшую модель, хорошо известную в электронике. Пусть вдоль оси X движется пучок невзаимодействующих частиц (электронов). В процессе движения их скорость $\upsilon$ не изменяется. В эйлеровых координатах $(x,t)$ она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x} = 0 \qquad (2.4)$$

Эта модель описывает поведение электронного потока в рамках кинематической теории в приборах клистронного типа. Электроны на входе в первый резонатор клистрона имеют одинаковые скорости. В первом резонаторе они модулируются по скорости электромагнитным полем:

$$\upsilon = \upsilon_0 + u\,, \qquad (2.5)$$

где $\upsilon_0$ - скорость электронов на входе в первый резонатор, $u$ - дополнительная скорость, получаемая заряженной частицей в зазоре резонатора.

В трубе дрейфа происходит группировка электронов, в выходном резонаторе поток является сгруппированным по плотности, следовательно, в этом резонаторе пучок возбуждает переменное электромагнитное поле.

Внешне уравнение (2.4) очень похоже на уравнение простой волны в нелинейной среде без затухания и дисперсии (2.1). Пусть модуляция электронов в зазоре первого резонатора является слабой, то есть $u \ll \upsilon_0$.

В этом приближении из (2.4) и (2.5) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon_0\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2.6)$$

То есть при малой модуляции в электронном потоке могут распространяться стационарные волны (см. п.1.2).

Учтем теперь, что в момент времени $t$=0 пучок имеет некоторое возмущение по скорости. Перейдем в движущуюся со скоростью пучка $\upsilon_0$ систему координат, тогда координата и скорость заряженной частицы запишутся в виде:

$$x' = x - \upsilon_0 t, \tag{2.7}$$

$$u = \upsilon - \upsilon_0 . \tag{2.8}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x'} = 0 \tag{2.9}$$

Разные частицы в модулированном пучке имеют разную скорость, поэтому профиль волны меняется со временем, причем в процессе движения одни частицы могут обогнать другие, в результате функция $u(x',t)$ станет неоднозначной. Рассмотрим динамику пучка на плоскости $(u, X')$, см. рис. 2.1 (на этом рисунке красным цветом показана зависимость плотности пучка от продольной координаты). В начальный момент времени (рис. 2.1*а*) $t$=0, в пучке наблюдается гармоническая модуляция по скорости, плотность пучка одинакова во всех точках. В верхней полуплоскости скорость частиц больше нуля ($u$>0), и частицы со временем смещаются вправо. В нижней полуплоскости – влево. Изменение профиля волны и плотности пучка отражено на рис. рис. 2.1*б*. Последний рисунок (рис. 2.1*в*) соответствует опрокидыванию волны. В этот момент времени функция $u(x',t)$ уже не является однозначной, а зависимость плотности от координаты имеет особые точки, в которых плотность стремится к бесконечности.

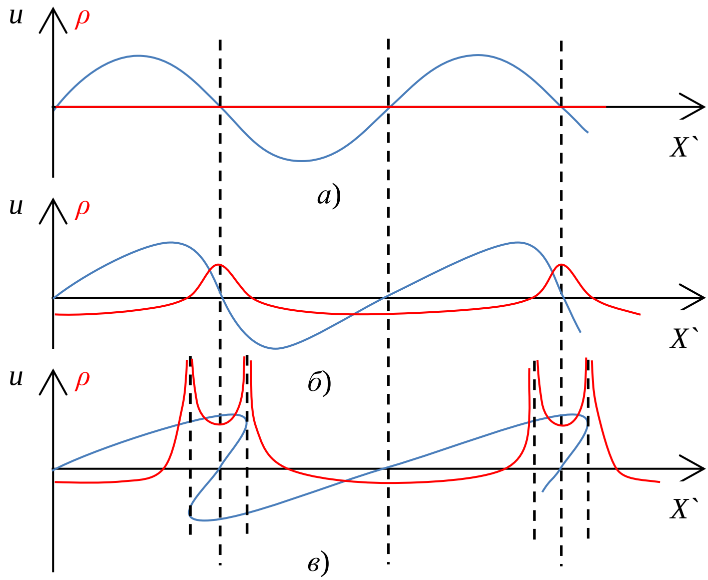



Рис.2.1 Зависимость смещений частиц от положения равновесия и плотности потока в движущейся системе координат в разные моменты времени: а) $t=t_0=0$, б) $t=t_1>t_0$, в) $t=t_2>t_1$.

Для устранения неоднозначности (см. рис. 2.1*в*) в электронике обычно кинематический анализ проводят для отдельных частиц, переходя к лагранжевым переменным $(X,t_0)$, где $t_0$- время влета частицы в зазор, где происходит модуляция по скорости.

Предположим, пучок модулируется по скорости в емкостном зазоре с гармонической зависимостью разности потенциалов от времени. Тогда выполняется соотношение

$$\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{m\upsilon_0^2}{2}+eV_1\sin\omega t \tag{2.10}$$

При малых модулирующих напряжениях $V_1$ можно записать

$$\upsilon=\upsilon_0\left(1+\frac{1}{2}\xi\sin\omega t_0\right) \tag{2.11}$$

где $\xi=\dfrac{V_1}{V_0}=\dfrac{V_1\cdot 2e}{m\upsilon_0^2}$

При движении с постоянной скоростью время $t$ пребывания частицы в точку с координатой $x$ равно

$$t = t_0 + \frac{x}{\upsilon} = t_0 + \frac{x}{\upsilon_0}\left(1 - \frac{1}{2}\xi \sin \omega t_0\right) \tag{2.12}$$

Тогда каждая частица относительно волны, движущейся со скоростью $\upsilon_0$, имеет фазу

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega x}{\upsilon} = \omega t_0 - \frac{\xi x}{2\upsilon_0} \sin \omega t_0 \tag{2.13}$$

Траектории частиц на фазовой плоскости ($\Phi$, $X$) имеют вид, показанный на рис. 2.2.

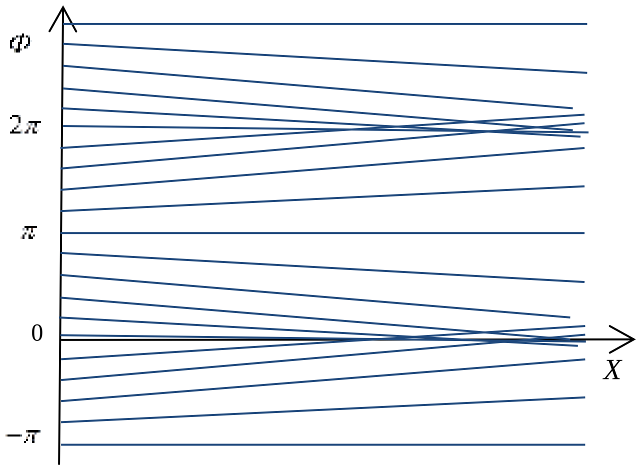



Рис.2.2 Зависимость фазы частиц от продольной координаты

Найдем значение $x$, при котором траектории частиц начинают пересекаться, то есть функция $u = u(t, x)$ перестает быть однозначной. Для этого найдем пересечение траектории частицы, для которой $\omega t_0 \ll 1$ с прямой $\Phi = 0$ .

Используя (2.13) получаем для малых значений $\omega t_0$

$$\Phi \approx \omega t_0 - \frac{\xi x}{2\upsilon_0} \omega t_0 = 0 \tag{2.14}$$

Отсюда находим,

$$x = \frac{2\upsilon_0}{\xi} . \qquad (2.15)$$

В электронике рассмотренное явление называется баллистической группировкой электронов и является основой работы усилителей клистронного типа (см. тему 5).

### 2.2.2. Нелинейные волны в среде без дисперсии.

Рассмотрим теперь общие свойства волн в произвольной нелинейной среде без дисперсии, когда выполняется волновое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (2.16)$$

Для анализа решений этого уравнения используем метод характеристик (см. приложение 1).

Для определения характеритик уравнения (2.16) воспользуемся системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \upsilon(u) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Следовательно, характеристиками уравнения (2.16) являются прямые

$$x - \upsilon(u)t = const . \qquad (2.18)$$

Вдоль этих характеристик $u = const$, а, следовательно, и скорость $\upsilon(u) = const$ - постоянная величина.

Таким образом, можно считать, что

$$u(x,t) = u(x - \upsilon(u)t) . \qquad (2.19)$$

Для определения функции $u(x,t)$ можно воспользоваться начальным условием

$$u(x,0) = F(x) . \qquad (2.20)$$

Здесь $F(x)$ заданная в начальный момент времени форма импульса смещения.

Волна, определяемая уравнением (2.16) называется простой волной или волной Римана.

Для того чтобы изучить влияние нелинейности на распространение волнового профиля, найдем решение уравнения (2.16), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=\begin{cases} a^2-x^2 & при \quad |x|\le a \\ 0 & при \quad |x|>a \end{cases} \tag{2.21}$$

Это соотношение описывает параболический импульс.

Для линейной задачи, когда скорость волны не зависит от ее амплитуды, учитывая (2.19), решение запишем в виде

$$u(x,t)=\begin{cases} a^2-\left(x-\upsilon t\right)^2 & при \quad |x-\upsilon t|\le a \\ 0 & при \quad |x-\upsilon t|>a \end{cases} \tag{2.22}$$

То есть характеристики являются параллельными линиями, и форма импульса в этом случае не меняется со временем.

Для нелинейной задачи при начальном условии (2.21) решение (2.16) имеет вид

$$u(x,t)=\begin{cases} a^2-\left(x-ut\right)^2 & при \quad |x-ut|\le a \\ 0 & при \quad |x-ut|>a \end{cases}, \tag{2.23}$$

здесь для определенности принято $\upsilon(u)=u$

Из (2.23) следует, что при $|x-ut|\le a$

$$u^2t^2-u(2xt-1)+x^2-a^2=0 \tag{2.24}$$

Разрешая (2.24) относительно *u* имеем

$$u(x,t)=\begin{cases} \dfrac{\left(2xt-1\right)\pm\left(1-4xt+4a^2t^2\right)^{1/2}}{2t^2} & при \quad |x-ut|\le a \\ 0 & при \quad |x-ut|>a \end{cases}. \tag{2.25}$$

При малых *t* нужно брать знак + перед радикалом. При t > $\tau$ ($\tau$-характерное время, которое нужно определить) допустимы оба знака в (2.25).

На рис. 2.3 и рис. 2.4 показаны типичные характеристики уравнения при *a*=1 при начальных условиях (2.21) и изменение формы импульса со временем

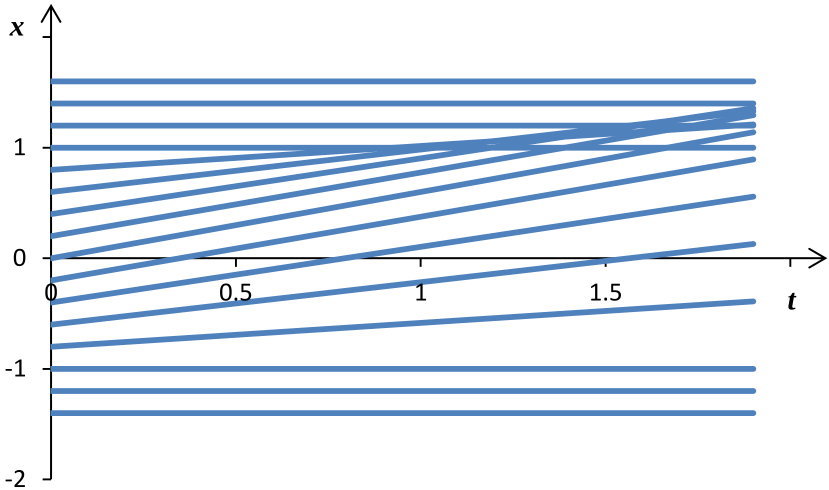



Рис. 2.3 Характеристики уравнения (2.16) для параболического импульса, $a$=1.0, $\upsilon$=0.6$u$

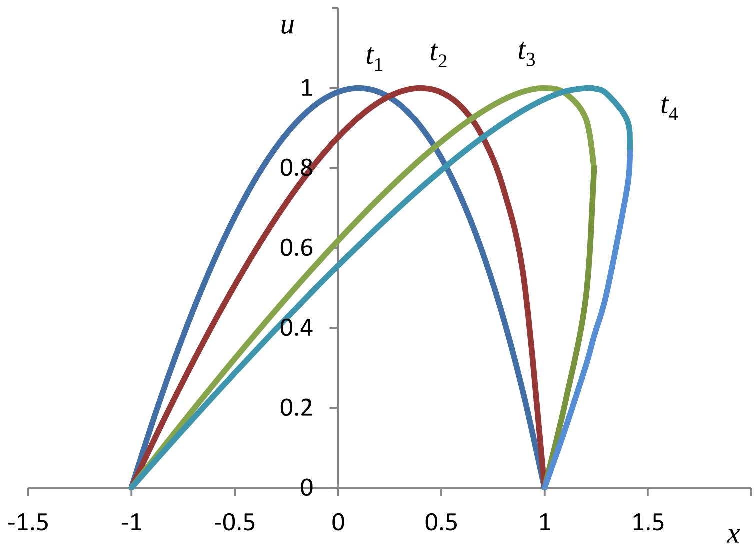



Рис. 2.4. Изменение формы параболического импульса со временем; $a$=1.0, $\upsilon$=$u$, $t_1$=0.1, $t_2$=0.4, $t_3$=1.0, $t_4$=1.2.

Таким образом, в рассмотренном примере нелинейность приводит к деформации волнового профиля, возрастающей с ростом времени. В некоторый момент времени волна имеет практически вертикальный волновой фронт – возникает ударная волна, затем происходит опрокидывание. Найдем время t, через которое происходит опрокидывание. Для этого рассмотрим величину $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}$. При $t \le \tau$ она отрицательна (см. рис.2.4)

Минимальное значение момента времени $t$, когда $\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}$ меняет знак, то есть становится большим нуля и будет равно времени τ.

В этот момент времени

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a} \to \infty . \tag{2.26}$$

Из (2.25) получаем

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a} = \frac{1}{2t^2}\left(2t \mp \frac{2t}{1-2at}\right). \tag{2.27}$$

Отсюда следует, что (2.26) выполняется при условии

$$t = \tau = \frac{1}{2a} \tag{2.28}$$

Этот же результат можно получить, если учесть, что при увеличении времени сначала при $x=a$, а затем и при $x>a$ будут реализовываться оба решения (2.25), то есть они оба будут больше нуля. В частности, должно выполняться

$$\left.(2xt-1) \pm \left(1-4xt+4a^2t^2\right)^{1/2}\right|_{x=a} \ge 0$$

Отсюда следует, что

$$(2at-1) \ge 0 ,$$

что полностью соответствует (2.28).

Отметим, что в случае нелинейных волн мы не можем применять метод Фурье (разложение в спектр), а потому не можем говорить о волновом числе, частоте, скорости волны, групповой скорости до тех пор, пока не укажем метод их определения.

## П.2.3. Нелинейные волны в среде с диссипацией.

### П.2.3.1. Общие свойства волн в среде с диссипацией

Запишем уравнение Бюргерса (2.2) для частного случая $\upsilon(u) = u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2.29$$

Для анализа свойств решений этого уравнения перепишем его в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}u^2 - \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (2.30)$$

Предположим, что при $x \to \pm\infty$ смещение точек среды стремится к нулю $u \to 0$. Положим также $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Тогда после интегрирования уравнения (2.30) по $x$ от $-\infty$ до $+\infty$ получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx\right) = 0, \qquad (2.31)$$

отсюда следует, что

$$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = const\,. \qquad (2.32)$$

Величина $I(t)$ является интегралом движения. То есть площадь, под графиком функции $u(x,t)$ не меняется со временем.

Уравнение Бюргерса допускает аналитическое решение, найдем его так, как это сделано, например, в [1].

Для этого воспользуемся преобразованием Хопфа-Коула: введем функцию $w$ таким образом, чтобы

$$u = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln w, \text{ то есть} \qquad (2.33)$$

$$w = e^{-\frac{1}{2\nu}\int u dx} \qquad (2.34)$$

после подстановки в уравнение Бюргерса (2.29) получаем

---

[1] Н.В.Карлов, Н.А.Кириченко. Колебания, волны, структуры. М.2003.

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2.35)$$

Это уравнение является уравнением теплопроводности (или диффузии). Его решение в неограниченной области имеет вид

$$w(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}w_0(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}dy\ , \qquad (2.36)$$

где $w_0=e^{-\frac{1}{2\nu}\int u_0dx}$ - определяется начальным профилем волны. После подстановки (2.37) в (2.34) получаем

$$u(x,t)=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-y}{t}e^{-\frac{1}{\nu}\psi(x,t,y)}dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{\nu}\psi(x,t,y)}dy}\ , \qquad (2.37)$$

где введено обозначение

$$\psi(x,t,y)=\frac{1}{2t}(x-y)^2+\int_0^y u_0(z)dz \qquad (2.38)$$

Из (2.38) следует еще одна особенность решения уравнения Бюргерса: функция $u(x,t)$ не является многозначной, то есть, наличие вязкости приводит к невозможности опрокидывания волн.

При малой крутизне профиля импульса динамику процессов определяет нелинейность, при большой – диссипация, которая и приводит к невозможности опрокидывания.

### П.2.3.2. Стационарные волны в среде с диссипацией.

Найдем условия, при котором уравнение Бюргерса описывает стационарную волну. Будем искать решение в виде

$$u(x,t)=u(x-\upsilon t) \qquad (2.39)$$

Введя новую переменную $\xi=x-\upsilon t$ и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\upsilon\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

перепишем уравнение Бюргерса (2.29) в виде

$$(u-\upsilon)\frac{\partial u}{\partial \xi}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \qquad (2.40)$$

После первого интегрирования (2.40) получаем

$$\frac{u^2}{2}-\upsilon u=\nu\frac{\partial u}{\partial \xi}+A \qquad (2.41)$$

Отсюда следует, что для стационарной волны при $\xi \to \pm\infty$ смещения частиц от положения равновесия не равны нулю. Пусть

$$\begin{aligned} &u \to u_1 \quad при \quad \xi \to -\infty \\ &u \to u_2 \quad при \quad \xi \to -\infty \\ &\frac{\partial u}{\partial \xi} \to 0 \quad при \quad \xi \to \pm\infty \end{aligned} \qquad (2.42)$$

Из (2.41) и (2.42) получаем систему уравнений для определения значения константы *A* и скорости волны

$$\begin{aligned} &\frac{u_1^{\ 2}}{2}-\upsilon u_1 = A, \\ &\frac{u_2^{\ 2}}{2}-\upsilon u_2 = A. \end{aligned} \qquad (2.43)$$

Из (2.43) находим

$$\begin{aligned} &\upsilon=\frac{u_1+u_2}{2}, \\ &A=-\frac{1}{2}u_1u_2. \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Подставляя (2.44) в (2.41) получаем

$$\nu\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{u^2}{2}-\frac{u_1+u_2}{2}u+\frac{u_1\cdot u_2}{2}\ .$$

Дальнейшее интегрирование дает

$$u=u_2+\frac{u_1-u_2}{1+e^{\frac{u_1-u_2}{2\nu}(x-\upsilon t)}} \qquad (2.45)$$

или окончательно

$$u=\frac{u_1+u_2}{2}-\frac{u_1-u_2}{2}th\frac{u_1-u_2}{2\nu}\left(x-\upsilon t\right) \qquad (2.46)$$

Вид этого решения показан на рис.2.5.

Полученное решение описывает равномерно движущуюся резкую границу.

При $\nu \to 0$ волна превращается в волну с вертикальным фронтом.

Решение показывает также, что при сколь угодно малой диссипации невозможна реализация опрокидывающейся волны (имеющей неоднозначные решения), что полностью соответствует выводу, сделанному в п. 2.3.1.

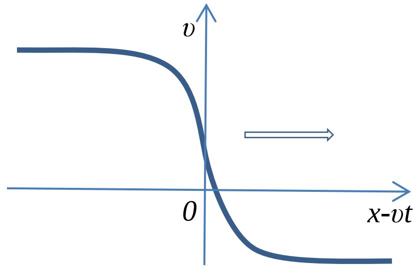



Рис.2.5. Качественный вид решения уравнения Бюргерса.

### 2.4. Нелинейные волны в диспергирующей среде.

#### 2.4.1. Волны на мелкой воде. Уравнение Картевега-де-Фриза.

Воспользуемся дисперсионным уравнением для гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)th(kh), \tag{2.47}$$

где $g$- ускорение свободного падения, σ- коэффициент поверхностного натяжения, $\rho$ и $h$ – плотность и толщина слоя жидкости соответственно.

Рассмотрим частный случай волн на мелкой воде ($kh$<<1) и пренебрежем капиллярными явлениями ($\sigma$=0), то есть рассмотрим чисто гравитационную волну на мелкой воде.

Тогда закон дисперсии примет вид

$$\omega^2 = gk \cdot th(kh) \approx ghk^2\left(1 - \frac{1}{3}k^2h^2\right) \tag{2.48}$$

или

$$\omega = ck - \beta k^3, \tag{2.49}$$

здесь

$$c=\sqrt{gh}\,,\ \beta=\frac{1}{6}\sqrt{gh}\cdot h^2\,. \tag{2.50}$$

Таким образом, для гравитационных волн фазовая скорость явно зависит от волнового числа

$$\upsilon_\phi=\frac{\omega}{k}=c\left(1-\frac{1}{6}c\cdot h^2\right) \tag{2.51}$$

и рассматриваемая среда является диспергирующей.

Восстановим по закону дисперсии вид линейного дифференциального уравнения, которому подчиняются волны на мелкой воде.

Для линейных задач на частоте $\omega$ волна описывается функцией

$$u(t,x)=u_0e^{i(\omega t-kx)}\,. \tag{2.52}$$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\omega\cdot u_0e^{i(\omega t-kx)}=i\omega u \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x}=-ik\cdot u_0e^{i(\omega t-kx)}=-iku\,,$$

заменим частоту и волновое число в уравнении (2.49) операторами по правилу

$$\omega u\to\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial t}u,\quad k\to-\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial x}u \tag{2.53}$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0\,, \tag{2.54}$$

это уравнение называют линеаризованным уравнением Картевега - де-Фриза (КдФ), оно описывает гравитационные волны малой амплитуды на поверхности мелкой жидкости.

При значительной амплитуде волны возникает зависимость скорости распространения от амплитуды волны. Предположим, что

$$c=\upsilon_0+u \tag{2.55}$$

Тогда уравнение КдФ примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(\upsilon_0+u\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{2.56}$$

**П.2.4.2 Качественный анализ решений КдФ.**

Исторически уравнение КдФ появилось в конце XIX века при решении именно этой гидродинамической задачи. Рассмотрим основы качественного анализа уравнения КдФ, для этого положим $c = u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{2.57}$$

Будем искать решение уравнения (2.57) в виде стационарных волн. Наличие дисперсии волн приводит к неизбежному расплыванию волнового пакета, однако если дисперсионное расплывание компенсирует процесс опрокидывания волны, тогда ее профиль может стабилизироваться. Предположим, как и ранее, что существуют решения вида

$$u(x,t) = u(x - \upsilon t) \equiv u(\xi).$$

Для таких решений, так же, как для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\upsilon\frac{du}{d\xi}$$

Учитывая это условие, получаем вместо (2.57)

$$\beta\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + (u - \upsilon)\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \tag{2.58}$$

После первого интегрирования получаем уравнение

$$\beta\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}u^2 - u\cdot\upsilon = A \tag{2.59}$$

Здесь $A$-константа, определяемая начальными условиями. Для анализа решений уравнения (2.59) удобно сопоставить это уравнение с уравнением движения консервативного нелинейного осциллятора. Это можно сделать, если рассмотреть $\beta$ как аналог массы $m$, а $\xi$ как аналог времени. Обозначим аналог потенциальной энергии как $U$:

$$U(u) = \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u^2\cdot\upsilon + Au \tag{2.60}$$

Тогда возвращающая сила

$$F = -\frac{\partial U}{\partial u} \tag{2.61}$$

После проведения такой аналогии, удобно воспользоваться одним из методов анализа решений уравнений нелинейных колебаний, а именно рассмотрением фазового портрета нелинейной системы (см. приложение 2).

При дальнейших качественных рассуждениях постоянную $A$ будем считать равной нулю. Это всегда можно сделать надлежащей заменой переменных.

Зависимость «потенциальной энергии» (2.60) $U$ от $u$ и фазовый портрет динамической системы, соответствующей уравнению (2.59) показан на верхнем графике рис. 2.6.

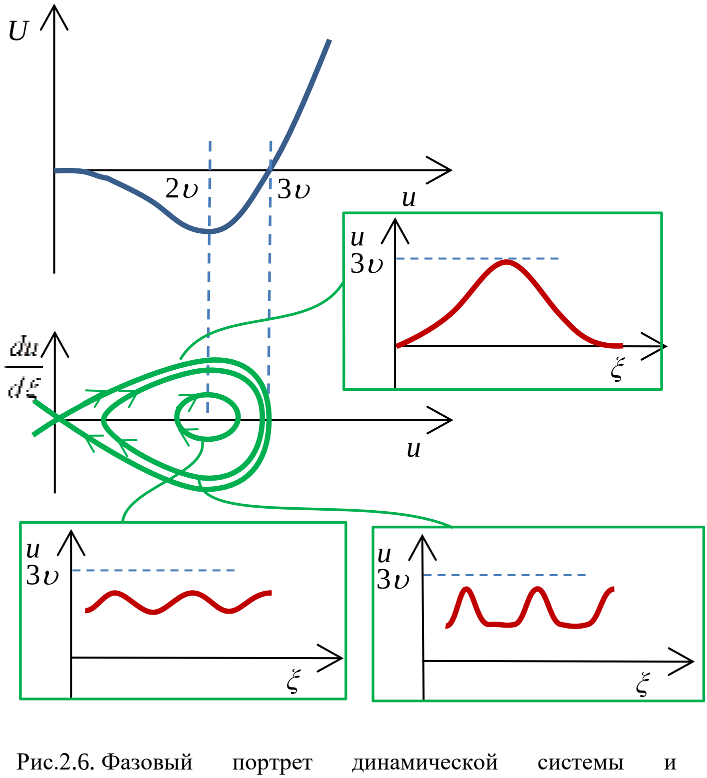



Рис.2.6. Фазовый портрет динамической системы и качественный вид решений уравнения КдФ.

На зависимостях $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}(u)$ показан качественный фазовый портрет системы, на котором выделены три характерных фазовых траектории – эллипс для колебаний с малой амплитудой, кривая, соответствующая пределному циклу (сепаратриса) и промежуточная кривая. Решения для выделенных фазовых траекторий ( зависимости $u(\xi)$) показаны во врезках к рис. 2.6

Можно выделить следующие классы решений уравнения КдФ

1. Квазигармонические колебания с малыми амплитудами (им соответствует фазовая траектория близкая к эллипсу) – для них нелинейность почти не сказывается

2. Движение с большими амплитудами вблизи сепаратрисы и по самой сепаратрисе. Периодические движения вблизи сепаратрисы (на врезке $u(\xi)$- периодическая последовательность импульсов) называются кноидальными волнами. Сепаратрисе соответствует локализованное в пространстве решение в виде одиночного импульса (см. врезку к рис. 2.6) или уединенной волны- солитона с амплитудой $3\upsilon$. Если обозначить $\mu = \sqrt{\dfrac{\upsilon}{4\beta}}$, это решение аналитически запишется в виде

$$u(x-\upsilon t) = \frac{3\upsilon}{ch^2\left(\mu\left(x-\upsilon t\right)\right)}, \qquad (2.62)$$

Справедливость решения (2.62) можно проверить прямой подстановкой в уравнение (2.57)

### П.2.4.3. Точное решение уравнения КдФ.[2]

Воспользуемся общим видом уравнения КдФ (2.56)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\upsilon_0 + u\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Так же, как и раньше будем искать решение этого уравнения в виде стационарной волны, движущейся со скоростью $\upsilon$

$$u(x,t) = u(x-\upsilon t) \equiv u(\xi). \qquad (2.63)$$

Так же, как и ранее воспользуемся

[2]Н.В.Карлов, Н.А.Кириченко. Колебания, волны, структуры. М.2003.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{du(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{du(\xi)}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{du(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\upsilon\frac{du(\xi)}{\partial \xi}.$$

Подстановка этих соотношений в (2.56) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\beta\frac{d^3u}{d\xi^3} + (u + \upsilon_0 - \upsilon)\frac{du}{d\xi} = 0$$

Откуда окончательно

$$\beta\frac{d^3u}{d\xi^3} + (u - u_0)\frac{du}{d\xi} = 0, \tag{2.64}$$

где $u_0 = \upsilon - \upsilon_0$.

После первого интегрирования получаем выражение, аналогичное (2.59)

$$\beta\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{2}u^2 - u \cdot u_0 = A, \tag{2.65}$$

здесь *A*- константа интегрирования. Далее умножим (2.65) на $\frac{\partial u}{\partial \xi}$:

$$\beta\frac{du}{d\xi}\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{2}u^2\frac{du}{d\xi} - u \cdot u_0\frac{du}{d\xi} = A \cdot \frac{du}{d\xi}$$

получаем

$$\frac{1}{2}\beta\frac{d}{d\xi}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = -\frac{1}{6}\frac{du^3}{d\xi} + \frac{1}{2}u_0\frac{du^2}{d\xi} + A \cdot \frac{du}{d\xi} \tag{2.66}$$

Полученное уравнение можно проинтегрировать один раз:

$$\frac{1}{2}\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = -\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u^2 \cdot u_0 + Au + B \tag{2.67}$$

Правая часть (2.67) представляет собой полином 3-й степени. Если обозначить корни этого полинома как $u_1$, $u_2$, $u_3$, то (2.67) перепишется в виде.

$$\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = \frac{1}{3}(u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u) \tag{2.68}$$

Для этого уравнения можно записать решение в явном виде.

Учитывая, что правая часть должна быть больше нуля (нулю она тоже не может быть равна, так как в этом случае $u = const$), положим

$$u_3 \le u_2 < u < u_1$$

Тогда искомое решение этого уравнение запишется в виде

$$u(\xi) = \left(u_1 - u_3\right) dn^2\left(\sqrt{\frac{u_1 - u_2}{12\beta}}\xi, \chi\right) + u_3, \tag{2.69}$$

где $dn(x,\chi)$-эллиптическая функция Якоби (дельта амплитуды) с модулем (см. приложение1)

$$\chi = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}} \le 1. \tag{2.70}$$

Полученное решение описывает периодическую волну с периодом

$$\lambda = 2K(\chi)\sqrt{\frac{12\beta}{u_1 - u_2}} \tag{2.71}$$

Здесь $K(\chi)$-полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $\chi$. Период этой волны неограниченно растет, когда $\chi \to 1$, то есть, когда $u_2 \to u_3$. В этом случае решение соответствует уединенной локализованной волне – солитону.

Рассмотрим особенности получившегося решения (2.69). Пусть $u_3$=0, тогда $A$=0, $B$=0, $u_1$=3$u_0$. Профиль уединенной волны, при этом, описывается функцией

$$u(x - \upsilon t) = \frac{3u_0}{ch^2\left(\mu\left(x - \upsilon t\right)\right)}. \tag{2.72}$$

Здесь

$$\mu = \sqrt{\frac{u_0}{4\beta}}. \tag{2.73}$$

В принятых обозначениях параметр $u_0$ связан со скоростью волны следующим образом $u_0 = \upsilon - \upsilon_0$.

Таким образом, анализируя (2.72), можно сделать следующие утверждения:

**амплитуда солитона** - 3$u_0$,

**его скорость**

$$\upsilon = u_0 + \upsilon_0, \tag{2.74}$$

Учитывая, что $\upsilon_0$ - скорость волн малой амплитуды (см. 2.56), получаем, что скорость уединенной волны больше, чем скорость волн малой амплитуды в этой среде. Кроме того, скорость волны растет с увеличением амплитуды солитона ( $3u_0$ )
**ширина солитона** определяется параметром

$$\delta = \frac{1}{\mu} = \sqrt{\frac{4\beta}{u_0}}. \tag{2.75}$$

Анализируя полученное решение (2.75), можно сделать **следующие выводы**.

*1) Чем выше солитон, тем он уже.*

*2)Чем солитон шире, тем он медленнее бежит и тем меньше его амплитуда.*

То есть, **ширина, скорость и амплитуда** солитона уравнения КдФ однозначно связаны**.**

**Задания к теме 2.**

1. Нарисуйте качественно характеристики для уравнения (2.16) при условии $\upsilon(u) = \upsilon_0 = const$.
2. Получите ограниченное стационарное решение линеаризованного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

3. Скорость волн малой амплитуды на поверхности канала равна $\upsilon_0$, солитон движется со скоростью $\upsilon_1$. Амплитуда солитона увеличилась в 3 раза, как изменилась его скорость?

**Приложение к теме. 2**

**П.2.1 Метод характеристик**

Рассмотрим произвольное дифференциальное уравнение

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=c\,, \qquad (\text{П}2.1)$$

где *a=a(x,y,u), b=b(x,y,u), c=c(x,y,u).*

Интегральные кривые, определяющиеся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x,y,u)}=\frac{dy}{b(x,y,u)}=\frac{du}{c(x,y,u)}\equiv d\theta \qquad (2.2.17)$$

являются характеристиками. Здесь $\theta$ - параметр. В обычной форме уравнения (2.2.17) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{d\theta}=a(x,y,u),$$

$$\frac{dy}{d\theta}=b(x,y,u), \qquad (2.2.18)$$

$$\frac{du}{d\theta}=c(x,y,u)$$

Если *u(x,y)* является интегральной поверхностью, то ее всегда можно покрыть семейством характеристик.

Вдоль каждой характеристики уравнение (2.2.16) переходит в $\frac{du}{d\theta}=c$ .

# Приложение 1[3].

Функции Якоби (1827 г.)

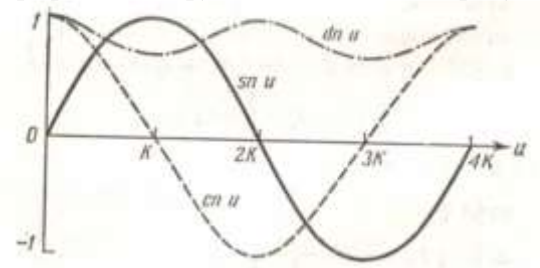
$$t=\int\limits_0^{amt}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-q^2\sin^2\alpha}}$$

$q$- модуль.

---

[3] Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: «Наука», 1974.

sn($t$)=sin($am\ t$) –синус амплитуды
cn($t$)=cos($am\ t$)- косинус амплитуды
$\mathrm{dn}(\mathrm{q,t}) = \Delta(q, am\,t) = \sqrt{1-q^2\mathrm{sn}^2 t}$ - дельта амплитуды.
Графики этих функций показаны на рисунке




здесь

$$K \equiv K(q) = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y)(1-q^2y^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-q^2\sin^2\alpha}}$$ -

полный эллиптический интеграл первого рода

**Приложение 2. Из истории открытия солитонов.**

**История изучения уединенных импульсов** – солитонов началась в 1834 году. Впервые уединенный солитон наблюдал Скотт Рассел[4]. Вот как он сам описывал это событие.

*"Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии бешеного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму большого одиночного возвышения, то есть округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, нисколько не меняя своей формы и не снижая скорости. Я последовал за ним верхом, и, когда я нагнал его, он по-прежнему катился вперед со скоростью приблизительно восемь или девять миль в час, сохранив свой первоначальный профиль возвышения длиной около тридцати футов и высотой от фута до фута с половиной. Его высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял его в изгибах канала. Так в августе 1834 г. мне впервые удалось столкнуться с необычайным и красивым явлением, которое я назвал волной трансляции; теперь это название общепринято.*

Аналитическое описание для наблюдавшейся Расселом волны пытались найти Буссинеска, Рэлей и другие физики. Только в 1895 году появилась работа Картевега и де Фриза, в которой им удалось вывести выражение для уединенной волны -солитона. На фотографии приведено возбуждение солитона в канале Форз Клайд в 1995 году во время конференции, посвященной столетию решения уравнения Картевега Де Фриза.

---

4

Скотт Расселл (1808-1882) был лучшим образцом предпринимателя викторианской эпохи. Развитый не по годам, он посещал лекции во всех трех шотландских университетах: Сент-Эндрюс, Эдинбургском и университете г. Глазго, пока не окончил последний в возрасте шестнадцати лет. Работая в Отделе естественной истории в Эдинбурге в 1832-1833 г., он получил задание изучить пропускную способность канала Юнион, который начинается у Эдинбурга, соединяется с каналом Форз-Клайд и тем самым соединяет оба побережья Шотландии, что могло бы способствовать более экономичному использованию пароходов. Вероятно, именно в процессе этих исследований он доложил о следующем наблюдении :

Уединенная волна в канале Форз-Клайд